

PRODUCTOS INTERNOS Y ORTOGONALIDAD

PRÁCTICA # 4

Objetivo general: El estudiante deberá conocer a los espacios vectoriales en el que se tenga la noción de ángulo, para ello requiere conocer la generalización del producto escalar del espacio euclidiano a espacios abstractos.

Objetivos específicos: Para esto el estudiante requerirá:

- Asimilar la definición de producto escalar.
- Asimilar la norma o el tamaño de vectores.
- Entender las nociones de ortogonalidad y ortonormalidad de vectores.
- Entender el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt, permite ortogonalizar un conjunto de vectores (finito) linealmente independientes.

1. PROBLEMAS PROPUESTOS PARA SER RESUELTOS POR EL ESTUDIANTE:

1. Si $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ son vectores de $\mathbb{R}^2$, definir

$$\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2.$$

Demuestre que esto define un producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

2. Sea A una matriz simétrica de $n \times n$.

- a) Definimos la función $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(X, Y) = X^t A Y$. ¿Será un producto escalar en $\mathbb{R}^n$?
- b) Encontrar una matriz A de 2×2 tal que $X^t A Y > 0$ para todo $X \neq 0$, entonces la matriz A se denomina definitivamente positiva.
- c) Si en (a) la matriz fija A es definitiva positiva, ¿será Φ un producto escalar en $\mathbb{R}^n$?

3. Determine si las siguientes matrices son definitivamente positivas:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Definamos la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : P_2 \times P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2,$$

donde, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ son del espacio de todos los polinomios de grado menor o igual a 2, P_2 . ¿Es esta función un producto escalar?

5. Calcule $\langle p, q \rangle$ aplicando el producto escalar del problema anterior, si

- a) $p(x) = -3 + 2x - x^2$, $q(x) = 2 + 4x - 2x^2$.
- b) $p(x) = -1 - x + 2x^2$, $q(x) = 2x + x^2$.
- c) Calcule $\|p\|$ y $\|q\|$ con p y q de (a).

6. Sean p y q polinomios en P_2 . Demuestre que

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1/2)q(1/2) + p(1)q(1),$$

es un producto escalar.

7. Sea V un espacio vectorial con producto escalar. Si u y v son vectores ortonormales de V , demuestre que $\|u - v\| = \sqrt{2} = \|u + v\|$.

8. Aplique el producto escalar

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx,$$

para calcular $\langle p, q \rangle$, donde p y q de P_3 están dados por

a) $p(x) = 1 - x - x^2 + 5x^3$, $q(x) = x - 3x^2$.

b) $p(x) = x - 5x^3$, $q(x) = 2 + 8x^2$.

9. Dada la función traza $\text{tr} : M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$ dada por $\text{tr}(A) = A^t$.

a) Demuestre que tr es una aplicación lineal.

b) Demuestre que $\text{tr}(A^t) = \text{tr}(A)$.

c) Si A es una matriz cuadrada simétrica, demuestre que $\text{tr}(A^2) \geq 0$.

10. Si u y v son vectores de un espacio con producto escalar, determinar $\|u - v\|$, sabiendo que $\|u\| = 2$, $\|v\| = 3$ y $\|u + v\| = \sqrt{10}$.11. Sea $\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi/2} f(x)g(x) dx$ un producto escalar en el espacio de funciones reales continuas. ¿Son ortogonales las funciones $p(x) = \sin x$ y $g(x) = 1$? Justifique su respuesta.12. Sea V es espacio vectorial de las funciones continuas $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, y suponga que el producto escalar esta dado por la integral $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$. Para $g_n(x) = \cos(nx)$, $f_m(x) = \sin(mx)$, con $n \geq 0$ y $m \geq 1$ enteros.

a) Muestre que $\|g_0\| = \sqrt{2\pi}$, $\|g_n\| = \|f_n\| = \sqrt{\pi}$ para $n \geq 1$.

b) Muestre que $g_n \perp g_m$ si $n \neq m$ y $g_n \perp f_m$ para todos los n, m .

13. Encuentre bases ortonormales para los subespacios de $\mathbb{R}^3$ generados por los vectores $(1, 1, -1)$ y $(1, 0, 1)$.14. Encuentre un abase ortonormal para el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 1, 0, 0)$, $(1, -1, 1, 1)$ y $(-1, 0, 2, 1)$.

15. Hallar una base ortonormal para el espacio de soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos:

a) $2x + y - z = 0$, $y + z = 0$.

b) $4x + 7y - z = 0$, $2x - y + z = 0$.

c) $x + y + z = 0$, $x - y = 0$, $y + z = 0$.

16. Suponga que $\mathbb{R}^2$ tiene el producto escalar habitual. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son ortonormales?

a) $(1, 0)$, $(0, 2)$.

b) $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

c) $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

17. Suponga que $\mathbb{R}^3$ tiene el producto escalar habitual. Aplique el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ en una base ortonormal.

a) $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$ y $u_3 = (1, 2, 1)$.

b) $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (3, 7, -2)$ y $u_3 = (0, 4, 1)$.

18. Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormal en un espacio con producto escalar V . Pruebe que si $w \in V$, entonces

$$\|w\|^2 = \langle w, v_1 \rangle^2 + \langle w, v_2 \rangle^2 + \langle w, v_3 \rangle^2.$$

19. Suponga que el espacio vectorial P_2 tiene el producto escalar dado por:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx.$$

Aplique el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base estándar $\{1, x, x^2\}$ en una base ortonormal.

2. PROBLEMAS PROPUESTOS PARA SER RESUELTOS POR EL AUXILIAR DOCENTE:

1. Sea $a > 0$. Pruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ es definitivamente positiva si, y solo si, $ad - b^2 > 0$. ¿Qué sucede si $a < 0$?
2. Sea la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{2 \times 2} \times M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Demstrar si la función así definida es un producto escalar.

3. Dada la aplicación lineal traza $tr : M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$
 - a) Demuestre que $tr(AB) = tr(BA)$.
 - b) Si A es una matriz inversible, demuestre que $tr(A^{-1}BA) = tr(B)$.
4. Dada la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{n \times n} \times M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\langle A, b \rangle = tr(AB)$. Demuestre que esta función es un producto escalar definitivamente positivo.
5. Si u y v son vectores de un espacio con producto escalar, determinar el coseno del ángulo formado por los vectores u y v , sabiendo que $\|u\| = \sqrt{2}$, $\|v\| = \sqrt{3}$ y $\|u + v\| = 3$.
6. Sea $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$ un producto escalar en el espacio P_2 . ¿Son ortogonales los polinomios $-3 + 2x + x^2$ y $2 + 4x - 2x^2$? Respalde su afirmación.
7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con un producto escalar definitivamente positivo. Para W un subespacio cualquiera de V , demuestre que

$$V = W + W^\perp \quad \text{y} \quad W \cap W^\perp = \{0\},$$

es decir, V es la suma directa de W y su complemento ortogonal $W^\perp$. Además demuestre que $(W^\perp)^\perp = W$.

8. Sean $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ polinomios en el espacio vectorial P_2 y definamos el producto escalar $\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$. Sea $\mathcal{B}$ la base de P_2 que consta del polinomio $p(x) = 1 - x - x^2$ y sus dos primeras derivadas. Ortonormalice dicha base con respecto al producto escalar dado.
9. Sea $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ un producto en el espacio de funciones continuas, demostrar que para cualesquiera f y g continuas se tiene:

$$\left| \int_0^1 f(x)g(x) dx \right| = \left(\int_0^1 [f(x)]^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 [g(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

10. Sea V un espacio con producto escalar. Un operador lineal $T : V \rightarrow V$ es una **transformación ortogonal** si

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle,$$

para todo u, v de V .

- a) Demuestre que toda transformación ortogonal es inyectiva.
- b) Si V es de dimensión 2, y $\{v_1, v_2\}$ es una base ortonormal de V y a, b son dos escalares tales que $a^2 + b^2 = 1$. Verificar que la transformación definida por

$$\begin{aligned} T(v_1) &= av_1 + bv_2 \\ T(v_2) &= bv_2 - av_1 \end{aligned}$$

es una transformación ortogonal.