

TRANSFORMACIONES LINEALES

PRÁCTICA # 3

Objetivo general: El estudiante deberá conocer a las funciones que preservan estructuras algebraicas de espacios vectoriales: las transformaciones lineales o aplicaciones lineales, que son gran utilidad en la práctica.

Objetivos específicos: Para esto el estudiante requerirá:

- Asimilar la definición de transformación lineal.
- Entender de los espacios asociados a una transformación lineal: el núcleo y la imagen.
- Entender el álgebra y su representación por medio de matrices de las transformaciones lineales.
- El manejo del Teorema de la Dimensión.

1. PROBLEMAS PROPUESTOS PARA SER RESUELTOS POR EL ESTUDIANTE:

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ son transformaciones lineales?
 - a) $T(x, y) = (y, x)$.
 - b) $T(x, y) = (1 + x, y)$.
 - c) $T(x, y) = (x - 2, y + 1/2)$.
 - d) $T(x, y) = -(x, y)$.
2. ¿Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales?
 - a) $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $n < m$, definida mediante $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$.
 - b) $T : \mathbb{R}^m \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(x_1, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

donde $M_{m \times n}$ es el espacio de las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas reales.

- c) $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$.
3. ¿Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1, 1) = (1, 0)$ y $T(1, 1, 1) = (0, 1)$?
4. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.
 - a) Si $Tv_1, \dots, Tv_m \in W$ son linealmente independientes, demuestre que $v_1, \dots, v_m \in V$ son linealmente independientes.
 - b) Si T es no singular (i.e., $Tv = 0$ implica $v = 0$) y v_1, \dots, v_m son linealmente independientes, demostrar que Tv_1, \dots, Tv_m son linealmente independientes.
5. Sean T y U operadores lineales en \mathbb{R}^2 definidas por

$$T(x, y) = (y, x), \quad U(x, y) = (x, 0).$$

- a) ¿Cómo se describirán T y U geoméricamente?

- b) Dar reglas semejantes a las que definieron T y U para cada una de las transformaciones $T + U$, UT , TU , T^2 y U^2 .
6. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal. Sabiendo que $T(1, 1) = 3$ y $T(2, 3) = 1$, calcule $T(1, 0) + T(0, 1)$.
7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el operador lineal definido por

$$T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z).$$

¿Es T inversible? De serlo, hallar una expresión para T^{-1} como aquella que define para T .

8. Determine el núcleo y una base para la imagen de cada una de las transformaciones lineales de abajo; e, indique cuáles son inyectivas y cuáles son sobreyectivas.
- a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x - y, x - y)$.
- b) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + z, y + t)$.
- c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y/2, y + z/2, z + x/2)$.
- d) $T : P_n \rightarrow \mathbb{R}$, $Tp(x) = p(1)$.
9. Para cada una de las transformaciones lineales del ejercicio anterior, determine el núcleo y obtenga una base del mismo, en el caso en que no se reduzca a $\{0\}$.
10. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, cuyo núcleo es $\{0\}$. Suponga que $\dim V = \dim W = n < \infty$. Demuestre que la imagen de T es todo W .
11. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Suponga que $\dim V > \dim W = n < \infty$. Muestre que $\ker T \neq \{0\}$.
12. Demostrar que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada como sigue es inversible:
- a) $T(x, y) = (x + y, x - y)$.
- b) $T(x, y) = (2x + y, 3x - 5y)$.
13. Sea el espacio $V = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es derivable en } I\}$ y $D : V \rightarrow V$ dada por $Df = f'$. Hallar $\ker D$ y $\ker D^2$.
14. Sea la función $L : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ dada por $Q \cdot A = \frac{A + A^t}{2}$.
- a) Demuestre que L es transformación lineal.
- b) Hallar $\ker L$ y la nulidad de L .
- c) ¿Cuál es la imagen de L ?
15. ¿Cuál es la dimensión del subespacio de \mathbb{R}^6 perpendicular a los dos vectores $(1, 1, -2, 3, 4, 5)$ y $(0, 0, 1, 1, 0, 7)$
16. ¿Cuál es la dimensión del espacio de soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales? En cada caso encuentre una base para el espacio de soluciones.
- a) $2x + y - z = 0$, $2x + y + z = 0$.
- b) $x - y + z = 0$.
- c) $x + y + z = 0$, $x - y = 0$, $y + z = 0$.
17. Encuentre la matriz asociada con las siguientes transformaciones lineales:
- a) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2)$.
- b) La proyección de \mathbb{R}^4 en \mathbb{R}^3 .
- c) $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T \cdot X = kX$, con $k \in \mathbb{R}$.
- d) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, 0, 0)$.
- e) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal $T(1, 0, 0) = (1, -3)$, $T(0, 1, 0) = (-4, 2)$ y $T(0, 0, 1) = (3, 1)$.
18. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el operador lineal definido por $T(x, y) = (-y, x)$.
- a) ¿Cuál es la matriz de T respecto a la base canónica de \mathbb{R}^2 ?
- b) ¿Cuál es la matriz de T respecto a la base $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, -1)\}$?

- c) ¿Qué relación existe entre las matrices anteriores?
19. Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base del espacio vectorial V , y sea además $T : V \rightarrow V$ la transformación lineal cuya definición sobre esa base se da abajo. Hallar $[T]$ respecto de la base dada.
- a) $Tv_1 = 3v_2 - v_3, Tv_2 = v_1 - 2v_2 + v_3, Tv_3 = -2v_1 + 4v_2 + 5v_3.$
 b) $Tv_1 = 3v_1, Tv_2 = -7v_2, Tv_3 = 5v_3.$
 c) $Tv_1 = -2v_1 + 7v_3, Tv_2 = -v_3, Tv_3 = v_1.$
20. Sea la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x+y, -x, 0)$. Hallar la matriz asociada a T respecto de las base $\mathcal{B} = \{(1, 3), (-2, 4)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 0, 0)\}$.

2. PROBLEMAS PROPUESTOS PARA SER RESUELTOS POR EL AUXILIAR DOCENTE:

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales?
- a) $T : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $T(A) = \text{diag}(A)$, es decir, a cada matriz cuadrada le asigna su diagonal.
 b) Sea $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow M_{3 \times 3}$ dada mediante

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ -x & x & y \\ 0 & y & x - y \end{pmatrix},$$

2. Si

$$\alpha_1 = (1, -1) \quad \alpha_2 = (2, -1) \quad \alpha_3 = (-3, 2) \quad \beta_1 = (1, 0) \quad \beta_2 = (0, 1) \quad \beta_3 = (1, 1).$$

¿Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T\alpha_i = \beta_i$ para $i = 1, 2, 3$?

3. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal y $U : W \rightarrow V$ una función tal que $TU = I_W$ y $UT = I_V$. Probar que U es una transformación lineal.
4. Encontrar dos operadores lineales T y U en \mathbb{R}^2 tales que $TU = 0$, pero $UT \neq 0$.
5. Determine el núcleo y una base para la imagen de cada una de las transformaciones lineales de abajo; e, indique cuáles son inyectivas y cuáles son sobreyectivas.
- a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (x - y, y + 3z).$
 b) $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), T \cdot X = AX$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
 c) $T : P_n \rightarrow P_{n+1}, Tp(x) = x \cdot p(x).$
6. Para cada una de las transformaciones lineales del ejercicio anterior, determine el núcleo y obtenga una base del mismo, en el caso en que no se reduzca a $\{0\}$.
7. Dadas las transformaciones lineales $A : U \rightarrow V, B : V \rightarrow W$, ¿cuáles de las siguientes implicaciones es verdad?
- a) BA sobreyectiva $\Rightarrow B$ sobreyectiva.
 b) BA sobreyectiva $\Rightarrow A$ sobreyectiva.
 c) BA inyectiva $\Rightarrow B$ inyectiva.
 d) BA inyectiva $\Rightarrow A$ inyectiva.

Probar aún que si $U = V = W$ entonces las cuatro implicaciones son verdaderas.

8. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, y suponga que la imagen de T es igual a W . Además si $\dim V = \dim W = n < \infty$. Demostrar que el $\ker T = \{0\}$.
9. Demostrar que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada como sigue es inversible:
- a) $T(x, y, z) = (x - y, x + z, x + y + 2z).$
 b) $T(x, y, z) = (2x - y + z, x + y, 3x + y + z).$

10. Sea el espacio vectorial $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es una función}\}$. Definimos $Q : V \rightarrow V$ por $(Qf)(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$
- Demuestre que Q es transformación lineal.
 - Hallar $\ker Q$, ¿es posible hallar la nulidad de Q ?
 - ¿Cuál es la imagen de Q ?
11. Sea U un subespacio de \mathbb{R}^n . Demostrar que U^\perp es un subespacio. Si $\dim U = k$ con $(k \leq n)$, ¿cuál es la dimensión de U^\perp ?
12. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el operador lineal definido por $T(x, y, z) = (3x + z, -2x + y, -x + 2y + 4z)$.
- ¿Cuál es la matriz de T respecto a la base canónica de \mathbb{R}^3 ?
 - ¿Cuál es la matriz de T respecto a la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (-1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$?
 - ¿Qué relación existe entre las matrices anteriores?
13. Definir la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que respecto de las bases $\{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 , $\{(1, 2), (2, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 , su matriz asociada sea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Sean $A : U \rightarrow V$ y $B : V \rightarrow W$ dos transformaciones lineales, desde ya $\text{Im}A \cap \ker B \neq \emptyset$. Demuestre que
- $$\dim(\text{Im}A \cap \ker B) = \dim \text{Im}A - \dim \text{Im}BA = \dim \ker BA - \dim \ker A.$$