

ESPACIOS VECTORIALES

PRÁCTICA # 2

Objetivo general: El estudiante deberá conocer las propiedades de uno de los sistemas algebraicos: el Espacio Vectorial como objeto fundamental de estudio del álgebra Lineal.

Objetivos específicos: Para esto el estudiante requerirá:

- Observar que la definición de espacio vectorial establece un objeto compuesto de \mathbb{R} , de un conjunto de vectores y de dos operaciones.
- Entender de los conceptos básicos en el espacio vectorial: los Subespacios.
- Entender la definición algebraica de dimensión un espacio vectorial, esto mediante el concepto de base.

1. PROBLEMAS PROPUESTOS PARA SER RESUELTOS POR EL ESTUDIANTE:

1. ¿Puede un espacio vectorial constar de: (a) dos elementos; (b) de un elemento; de 100 elementos?
2. ¿Pueden existir en un espacio vectorial dos elementos nulos?
3. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Se definen

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') \\ c(x, y) &= (cx, cy).\end{aligned}$$

¿Es V , con estas operaciones, un espacio vectorial?

4. En \mathbb{R}^2 , mantengamos la definición del producto αv de un número por un vector, pero modifiquemos de tres maneras diferentes, la definición de la suma de dos vectores $u = (x, y)$ y $v = (x', y')$. En cada tentativa, indicar cuáles de los axiomas de espacio vectorial continúan válidos y cuáles no:
 - a) $u + v = (x + y', x' + y)$;
 - b) $u + v = (xx', yy')$;
5. Considere $V = V_1 \times V_2$, con V_1 y V_2 espacios vectoriales, cuyos elementos son los pares ordenados $v = (v_1, v_2)$, con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$. Probar que las operaciones en V dados por:

$$\begin{aligned}(v_1, v_2) + (u_1, u_2) &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2) \\ c(v_1, v_2) &= (cv_1, cv_2).\end{aligned}$$

le convierten en un espacio vectorial.

6. En cada caso determinar si W es un subespacio del espacio vectorial correspondiente:
 - a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z + 1 = 0\}$ de \mathbb{R}^3 .
 - b) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \wedge x - y + z = 0\}$ de \mathbb{R}^4 .
7. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores $x = (a_1, \dots, a_n)$ de \mathbb{R}^n son subespacios de \mathbb{R}^n ($n \geq 3$)?
 - a) todos los x tal que $a_1 \geq 0$;

- b) todos los x tal que $a_1 + 3a_2 = a_3$;
 c) todos los x tal que $a_1a_2 = 0$.
8. ¿Cuáles de los conjuntos son subespacios vectoriales?
 a) El conjunto de los vectores de \mathbb{R}^n cuyas coordenadas forman una progresión aritmética.
 b) Los vectores de \mathbb{R}^n cuyas k ($k \leq n$) primeras componentes son iguales.
 c) Las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(0) = f(1)$.
9. Muestre que el vector $v = (1, 2, 2)$ no es combinación lineal de los vectores $v_1 = (1, 1, 2)$ y $v_2 = (1, 2, 1)$.
10. Es fácil ver que

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} \quad \text{y} \quad U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$$

son subespacios de \mathbb{R}^3 . Hallar $W \cap U$ y su dimensión.

11. Sea W el subespacio del espacio vectorial de funciones reales, generado por $\cos^2 t$, $\sin^2 t$ y 1. Es $T = \{\cos^2 t, \sin^2 t, 1\}$ una base de W ?, en otro caso hallar una base para W .
12. Hallar una base y la dimensión del subespacio de \mathbb{R}^3 generado por los vectores $(1, 0, -1)$, $(0, -1, 1)$.
13. Sean x_1, x_2, x_3 los vectores fila y y_1, y_2, y_3 los vectores columna de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Verifique las relaciones $x_3 = 2x_2 - x_1$, $y_3 = 2y_2 - y_1$. Escriba y_1 y y_2 como combinaciones lineales de x_1 y x_2 , y viceversa. Concluya que los vectores fila y los vectores columna de la matriz dada generan los mismos subespacios de \mathbb{R}^3 .

14. Sea W el conjunto de todos los $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de \mathbb{R}^5 que satisfacen

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 &= 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Encontrar un conjunto finito de vectores que genera W .

15. Demuestre el conjunto

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

genera al conjunto de todas las matrices de tamaño 2×2 .

16. Sean $V = \mathbb{R}^3$ y U el subespacio generado por $(1, 2, -1)$ y $(2, 1, -3)$. Hallar W subespacio de V tal que $V = U \oplus W$.
17. Encuentre las coordenadas del vector v con respecto a los vectores v_1, v_2 y v_3 .
 a) $v = (1, 0, 0)$, $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, -1)$;
 b) $v = (0, 0, 1)$, $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, -1)$;
18. En cada caso, hallar, si existen, las coordenadas del vector X con respecto a los vectores A, B y C .
 a) $X = (1, 1, 1)$, $A = (0, 1, -1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 0, 2)$.
 b) $X = (1, 0, 1, 1)$, $A = (1, 0, -2, 1)$, $B = (2, 0, 1, 2)$, $C = (1, -2, 2, 3)$.
19. Demostrar que si dos vectores son linealmente dependientes, uno de ellos es un múltiplo escalar del otro.

20. ¿Para qué valores de k , los vectores $(k, 1, 1)$, $(1, k, 1)$ y $(1, 1, k)$ son linealmente independientes?
21. ¿Son los vectores $(1, 1, 2, 4)$, $(2, -1, -5, 2)$, $(1, -1, -4, 0)$ y $(2, 1, 1, 6)$ linealmente independientes en \mathbb{R}^4 ?
22. Compruebe que $\{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$ es una base de P_3 , luego hallar las coordenadas del vector $2-3x+x^2+2x^3$ con respecto de dicha base.
23. Hallar una base y la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & 0 \end{array} .$$

24. Probar que $\{1+x+x^2, x+x^2, x^2\}$ es base para P_2 (espacio de polinomios de grado menor o igual a 2).
25. Obtenga una base y consecuentemente determine la dimensión de cada uno de los subespacios del espacio de las matrices de $n \times n$ abajo descritos:
 - a) matrices cuya suma de los elementos de la diagonal (traza) es cero.
 - b) matrices que tienen la primera y la última fila iguales.
 - c) matrices cuya segunda fila es igual a la tercera columna.
26. Pruebe que $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ es un conjunto linealmente independiente en el espacio de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables una infinidad de veces.
27. En \mathbb{R}^4 , sea U el subespacio generado por $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$; y, W es subespacio generado por $(0, 2, -2, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$. Se sabe que

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W.$$

Hallar $\dim(U+W)$ y $\dim(U \cap W)$.

2. PROBLEMAS PROPUESTOS PARA SER RESUELTOS POR EL AUXILIAR DOCENTE:

1. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Se definen

$$\begin{aligned} (x, y) + (x', y') &= (x+x', 0) \\ c(x, y) &= (cx, 0). \end{aligned}$$

¿Es V , con estas operaciones, un espacio vectorial?

2. Use las relaciones $2(u+v) = 2u+2v$, $2w = w+w$ para probar que la conmutatividad $u+v = v+u$ puede ser demostrada a partir de los demás axiomas de espacio vectorial.
3. Sean V un espacio vectorial y $u, v \in V$. El **segmento de recta** de extremos u, v es, por definición, el conjunto

$$[u, v] = \{(1-t)u + tv : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Un conjunto $C \subset V$ se llama **convexo**, cuando para todo $u, v \in C$ se tiene $[u, v] \subset C$. Pruebe:

- a) La intersección de dos convexos es convexo.
- b) El conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq 1\}$ es convexo.
4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores $x = (a_1, \dots, a_n)$ de \mathbb{R}^n son subespacios de \mathbb{R}^n ($n \geq 3$)?
 - a) todos los x tal que $a_2 = a_1$;
 - b) todos los x tal que a_2 es racional.
5. ¿Cuáles de los conjuntos son subespacios vectoriales?

- a) El conjunto de los vectores de \mathbb{R}^n cuyas coordenadas forman una progresión geométrica.
- b) Los vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2 + 3x = y^2 + 3y$.
6. Pruebe que la unión de dos subespacios vectoriales de V es un subespacio vectorial si, y solo si, uno de ellos estuviera contenido en el otro.
7. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; sea V_P el subconjunto de las funciones pares, $f(-x) = f(x)$; sea V_I el subconjunto de las funciones impares, $f(-x) = -f(x)$.
- a) Demostrar que V_P y V_I son subespacios de V ;
- b) Demostrar que $V = V_P \oplus V_I$.
8. Hallar tres vectores de \mathbb{R}^3 que sean linealmente independientes y tales que dos cualesquiera de ellos sean linealmente independientes.
9. En el espacio de todos los polinomios de grado menor o igual a 3, determine el vector de coordenadas del polinomio $p(x) = 6 - x - 8x^2 - 8x^3$; en relación a la base $S = \{1 + 2x - x^2 + 3x^3, x + 2x^2 + 4x^3, 4 - 2x - 2x^3, 8x^3\}$.
10. Sean $v = (x_1, x_2)$ y $u = (y_1, y_2)$ dos vectores de \mathbb{R}^2 tales que

$$x_1y_2 + x_2y_1 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 = y_1^2y_2^2 = 1.$$

Demostrar que $\{v, u\}$ es una base de \mathbb{R}^2 .

11. Sean $u, v \in V$ vectores linealmente independientes. Dado $\alpha \neq 0$, pruebe que el conjunto de dos elementos $\{v, v + \alpha u\}$ es una base del subespacio generado por los vectores $v, v + u, v + 2u, \dots, v + nu, \dots$.
12. Obtenga una base y consecuentemente determine la dimensión de cada uno de los subespacios del espacio de las matrices de $n \times n$ abajo descritos:
- a) matrices simétricas.
- b) matrices antisimétricas.
- c) matrices en las cuales la suma de los elementos de la primera fila es igual a la suma de los elementos de la segunda columna.
13. Si U y W son subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial, entonces $U + W$ es dimensión finita y

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W).$$

¿Cuál es la dimensión de $U \oplus W$?