TRANSFORMACIONES LINEALES

PRÁCTICA # 3

Objetivo general: El estudiante deberá conocer a las funciones que preservan estructuras algebraicas de espacios vectoriales: las transformaciones lineales o aplicaciones lineales, que son gran utilidad en la práctica.

Objetivos específicos: Para esto el estudiante requerirá:

- Asimilar la definición de transformación lineal.
- Entender de los espacios asociados a una transformación lineal: el núcleo y la imagen.
- Entender el álgebra y su representación por medio de matrices de las transformaciones lineales.
- El manejo del Teorema de la Dimensión.

1. Problemas propuestos para ser resueltos por el estudiante:

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son transformaciones lineales?
   a) $T(x, y) = (y, x)$.
   b) $T(x, y) = (1 + x, y)$.
   c) $T(x, y) = (x - 2, y + 1/2)$.
   d) $T(x, y) = -(x, y)$.
2. ¿Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales?
   a) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $n < m$, definida mediante $T(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$.
   b) $T : \mathbb{R}^m \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$ definida por
   $$T(x_1, \ldots, x_m) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$
   donde $M_{m\times n}$ es el espacio de las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas reales.
   c) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $T(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$.
3. ¿Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1, 1) = (1, 0)$ y $T(1, 1, 1) = (0, 1)$?
4. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.
   a) Si $Tv_1, \ldots, Tv_m \in W$ son linealmente independientes, demuestre que $v_1 \ldots, v_m \in V$ son linealmente independientes.
   b) Si T es no singular (i.e., $Tv = 0$ implica $v = 0$) y $v_1, \ldots, v_m$ son linealmente independientes, demostrar que $Tv_1, \ldots, Tv_m$ son linealmente independientes.
5. Sean T y U operadores lineales en $\mathbb{R}^2$ definidas por
   $$T(x, y) = (y, x), \quad U(x, y) = (x, 0).$$
   a) ¿Cómo se describirán T y U geométricamente?

Date: Agosto del año 2004.

b) Dar reglas semejantes a las que definieron T y U para cada una de las transformaciones $T+U$, UT, TU, T^2 y U^2.

6. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una aplicación lineal. Sabiendo que $T(1,1)=3$ y $T(2,3)=1$, calcule $T(1,0)+T(0,1)$.
7. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ el operador lineal definido por
$$T(x,y,z)=(3x,x-y,2x+y+z).$$
¿Es T inversible? De serlo, hallar una expresión para T^{-1} como aquella que define para T.
8. Determine el núcleo y una base para la imagen de cada una de las transformaciones lineales de abajo; e, indique cúales son inyectivas y cúales son sobreyectivas.
   a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(x-y,x-y)$.
   b) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, $T(x,y,z,t)=(x+y,z+t,x+z,y+t)$.
   c) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T(x,y,z)=(x+y/2,y+z/2,z+x/2)$.
   d) $T:P_n\to\mathbb{R}$, $Tp(x)=p(1)$.
9. Para cada una de las transformaciones lineales del ejercicio anterior, determine el núcleo y obtenga una base del mismo, en el caso en que no se reduzca a $\{0\}$.
10. Sea $T:V\to W$ una transformación lineal, cuyo núcleo es $\{0\}$. Suponga que $\dim V=\dim W=n<\infty$. Demuestre que la imagen de T es todo W.
11. Sea $T:V\to W$ una transformación lineal. Suponga que $\dim V>\dim W=n<\infty$. Muestre que $\ker T\neq\{0\}$.
12. Demostrar que la transformación lineal $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada como sigue es inversible:
   a) $T(x,y)=(x+y,x-y)$.
   b) $T(x,y)=(2x+y,3x-5y)$.
13. Sea el espacio $V=\{f:I\to\mathbb{R}/f\text{es derivable en } I\}$ y $D:V\to V$ dada por $Df=f'$. Hallar $\ker D$ y $\ker D^2$.
14. Sea la función $L:M_{n\times n}(\mathbb{R})\to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dada por $Q\cdot A=\dfrac{A+A^t}{2}$.
   a) Demuestre que L es transformación lineal.
   b) Hallar $\ker L$ y la nulidad de L.
   c) ¿Cuál es la imagen de L?
15. ¿Cuál es la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^6$ perpendicular a los dos vectores $(1,1,-2,3,4,5)$ y $(0,0,1,1,0,7)$
16. ¿Cuál es la dimensión del espacio de soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales? En cada caso encuentre una base para el espacio de soluciones.
   a) $2x+y-z=0$, $2x+y+z=0$.
   b) $x-y+z=0$.
   c) $x+y+z=0$, $x-y=0$, $y+z=0$.
17. Encuentre la matriz asociada con las siguientes transformaciones lineales:
   a) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$, $T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_2)$.
   b) La proyección de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$.
   c) $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $T\cdot X=kX$, con $k\in\mathbb{R}$.
   d) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, $T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_2,0,0)$.
   e) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, tal $T(1,0,0)=(1,-3)$, $T(0,1,0)=(-4,2)$ y $T(0,0,1)=(3,1)$.
18. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ el operador lineal definido por $T(x,y)=(-y,x)$.
   a) ¿Cuál es la matriz de T respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$?
   b) ¿Cuál es la matriz de T respecto a la base $\mathcal{B}=\{(1,2),(1,-1)\}$?

   c) ¿Qué relación existe entre las matrices anteriores?

19. Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base del espacio vectorial V, y sea además $T : V \to V$ la transformación lineal cuya definición sobre esa base se da abajo. Hallar $[T]$ respecto de la base dada.
   a) $Tv_1 = 3v_2 - v_3$, $Tv_2 = v_1 - 2v_2 + v_3$, $Tv_3 = -2v_1 + 4v_2 + 5v_3$.
   b) $Tv_1 = 3v_1$, $Tv_2 = -7v_2$, $Tv_3 = 5v_3$.
   c) $Tv_1 = -2v_1 + 7v_3$, $Tv_2 = -v_3$, $Tv_3 = v_1$.
20. Sea la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x+y, -x, 0)$. Hallar la matriz asociada a T respecto de las base $\mathcal{B} = \{(1, 3), (-2, 4)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 0, 0)\}$.

2. Problemas propuestos para ser resueltos por el auxiliar docente:

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales?
   a) $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(A) = \operatorname{diag}(A)$, es decir, a cada matriz cuadrada le asigna su diagonal.
   b) Sea $A : \mathbb{R}^2 \to M_{3\times 3}$ dada mediante
$$T(x, y) = \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ -x & x & y \\ 0 & y & x-y \end{pmatrix},$$
2. Si
$$\alpha_1 = (1, -1) \quad \alpha_2 = (2, -1) \quad \alpha_3 = (-3, 2)\beta_1 = (1, 0) \quad \beta_2 = (0, 1) \quad \beta_3 = (1, 1).$$
   ¿Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T\alpha_i = \beta_i$ para $i = 1, 2, 3$?
3. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y $U : W \to V$ una función tal que $TU = I_W$ y $UT = I_V$. Probar que U es una transformación lineal.
4. Encontrar dos operadores lineales T y U en $\mathbb{R}^2$ tales que $TU = 0$, pero $UT \neq 0$.
5. Determine el núcleo y una base para la imagen de cada una de las transformaciones lineales de abajo; e, indique cúales son inyectivas y cúales son sobreyectivas.
   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - y, y + 3z)$.
   b) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $T \cdot X = AX$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   c) $T : P_n \to P_{n+1}$, $Tp(x) = x \cdot p(x)$.
6. Para cada una de las transformaciones lineales del ejercicio anterior, determine el núcleo y obtenga una base del mismo, en el caso en que no se reduzca a $\{0\}$.
7. Dadas las transformaciones lineales $A : U \to V$, $B : V \to W$, ¿cuáles de las siguientes implicaciones es verdad?
   a) BA sobreyectiva $\Rightarrow$ B sobreyectiva.
   b) BA sobreyectiva $\Rightarrow$ A sobreyectiva.
   c) BA inyectiva $\Rightarrow$ B inyectiva.
   d) BA inyectiva $\Rightarrow$ A inyectiva.
   Probar aún que si $U = V = W$ entonces las cuatro implicaciones son verdaderas.
8. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, y suponga que la imagen de T es igual a W. Además si $\dim V = \dim W = n < \infty$. Demostrar que el $\ker T = \{0\}$.
9. Demostrar que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada como sigue es inversible:
   a) $T(x, y, z) = (x - y, x + z, x + y + 2z)$.
   b) $T(x, y, z) = (2x - y + z, x + y, 3x + y + z)$.

10. Sea el espacio vectorial $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{es una función}\}$. Definimos $Q : V \to V$ por $(Qf)(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$
    a) Demuestre que Q es transformación lineal.
    b) Hallar $\ker Q$, ¿es posible hallar la nulidad de Q?
    c) ¿Cuál es la imagen de Q?
11. Sea U un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que $U^\perp$ es un subespacio. Si $\dim U = k$ con $(k \leq n)$, ¿cuál es la dimensión de $U^\perp$?
12. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el operador lineal definido por $T(x, y, z) = (3x + z, -2x + y, -x + 2y + 4z)$.
    a) ¿Cuál es la matriz de T respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$?
    b) ¿Cuál es la matriz de T respecto a la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (-1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$?
    c) ¿Qué relación existe entre las matrices anteriores?
13. Definir la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que respecto de las bases $\{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$, $\{(1, 2), (2, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, su matriz asociada sea
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
14. Sean $A : U \to V$ y $B : V \to W$ dos transformaciones lineales, desde ya $ImA \cap \ker B \neq \emptyset$. Demuestre que
$$\dim(ImA \cap \ker B) = \dim ImA - \dim ImBA = \dim \ker BA - \dim \ker A.$$