PROBLEMA 1.

Escribamos la sucesión de los números impares en orden de magnitud: 1, 3, 5, 7, … Designemos primero por u_1 el segundo por u_2, el tercero por u_3, etc.; así, se establece:

$$u_1 = 1,\ u_2 = 3,\ u_3 = 5,\ u_4 = 7,\ \ldots$$

Ahora vamos a plantear el problema de hallar una fórmula que exprese el número impar u_n en términos de su índice n.

SOLUCIÓN.

El primer número impar u_1 puede escribirse en la forma

$$u_1 = 2 * 1 - 1; \qquad (1)$$

El segundo número impar u_2 puede escribirse de la forma

$$u_2 = 2 * 2 - 1; \qquad (2)$$

El tercer número impar u_3 puede escribirse de la forma

$$u_3 = 2 * 3 - 1. \qquad (3)$$

Un examen cuidadoso de las igualdades (1), (2) y (3) conduce a la hipótesis de que cualquier número impar puede obtenerse multiplicando su índice por 2 y restando 1; es decir, que para cualquier número impar u_n,

$$u_n = 2n - 1. \qquad (4)$$

Probaremos que la fórmula (4) es válida generalmente.

Condición 1. La igualdad (1) muestra que la fórmula se cumple para $n = 1$.

Condición 2. Supóngase que la fórmula (4) se cumple para $n = k$; es decir, que el k-ésimo número impar está dado por

$$u_k = 2k - 1.$$

Demostraremos que, con esta suposición, la fórmula (4) también se cumple para el (k+1)-ésimo número impar, es decir, que el (k+1)-ésimo número impar debe estar dado por

$$u_{k+1} = 2(k+1) - 1 \text{ ó en forma equivalente, } u_{k+1} = 2k + 1.$$

Para obtener el (k+1)-ésimo número impar, sólo tiene que sumarse 2 al k-ésimo número impar; así, $u_{k+1} = u_k + 2$. Por hipótesis, $u_k = 2 * k - 1$. En consecuencia,

$$u_{k+1} = (2k - 1) + 2 = 2k + 1.$$

Resultado. $u_n = 2n - 1$.

PROBLEMA 2.

Calcular la suma de los primeros *n* número impares.

SOLUCIÓN.

Denotemos la suma requerida por S_n. Así,

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1).$$

Los problemas de este tipo se pueden resolver usando una fórmula probada. Pero nos interesa resolver el problema sin recurrir a tal fórmula y aplicando el método de

inducción matemática. Para hacerlo, es necesario establecer primero una hipótesis, es decir, tratar simplemente de adivinar la solución.
Asignaremos a n los valores sucesivos 1, 2, 3, … hasta contar con información suficiente para formular una hipótesis plausible. A continuación, debe probarse esta hipótesis con el método de la inducción matemática. Se encuentra que

$$S_1 = 1,\ S_2 = 4,\ S_3 = 9,\ S_4 = 16,\ S_5 = 25,\ S_6 = 36.$$

Ahora todo depende del poder de observación del estudiante –de su habilidad para conjeturar una relación general a partir de los resultados particulares. En los casos anteriores, se nota inmediatamente que

$$S_1 = 1^2,\ S_2 = 2^2,\ S_3 = 3^2,\ S_4 = 4^2.$$

Entonces es justo suponer que, en general,

$$S_n = n^2.$$

Condición 1. Para $n = 1$ la suma consiste de un solo término, a saber, el número 1. Para $n = 1$, el valor de la expresión n^2 es también 1. De aquí que la hipótesis se cumple para $n = 1$.

Condición 2. Supóngase que la hipótesis se cumple para $n = k$ o sea que $S_k = k^2$. Probemos que, con esta suposición, la hipótesis también debe cumplirse para $n = k+1$, es decir, que

$$S_{k+1} = (k+1)^2.$$

En efecto, si en el problema 1, u_{k+1} = 2k + 1, entonces:

$$S_{k+1} = S_k + (2k+1).$$

Pero $S_k = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$

Resultado. $S_n = n^2$.

PROBLEMA 3.

Hallar el término general de la sucesión de números u_n si $u_1 = 1$ y, si para todo número natural k > 1, se cumple la relación $u_k = u_{k-1} + 3$.

SOLUCIÓN.

El primer número u_1 puede escribirse en la forma

$$u_1 = 3 * 1 - 2; \qquad (1)$$

El segundo número impar u_2 puede escribirse de la forma

$$u_2 = 3 * 2 - 2; \qquad (2)$$

Un examen cuidadoso de las igualdades (1) y (2) conduce a la hipótesis de que cualquier número u_n puede obtenerse multiplicando su índice por 3 y restando 2; es decir, que para cualquier número impar u_n,

$$u_n = 3n - 2. \qquad (3)$$

Probaremos que la fórmula (3) es válida generalmente.

Condición 1. La igualdad (1) muestra que la fórmula se cumple para $n = 1$.

Condición 2. Supóngase que la fórmula (3) se cumple para $n = k$; es decir, que el k-ésimo número impar está dado por

$$u_k = 3k - 2.$$

Demostraremos que, con esta suposición, la fórmula (3) también se cumple para el (k+1)-ésimo número, es decir:

$$u_{k+1} = 3(k+1) - 2 \text{ ó en forma equivalente, } u_{k+1} = 3k + 1.$$

Para obtener u_{k+1}, sólo tiene que sumarse 3 a u_k ; así, $u_{k+1} = u_k + 3$. Por hipótesis, $u_k = 3k - 2$. En consecuencia,

$$u_{k+1} = (3k - 2) + 3 = 3k + 1.$$

Resultado. $u_n = 3n - 2$.

PROBLEMA 4.

Hallar la suma $S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1}$.

SOLUCIÓN 1.

Se encuentra que

$$S_1 = 2 - 1,\ S_2 = 2^2 - 1,\ S_3 = 2^3 - 1.$$

Entonces es justo suponer que, en general,

$$S_n = 2^n - 1.$$

Condición 1. Para $n = 1$ la hipótesis se cumple, pues $S_1 = 2 - 1$.

Condición 2. Supóngase que la hipótesis se cumple para $n = k$ o sea que $S_k = 2^k - 1$. Probemos que, con esta suposición, la hipótesis también debe cumplirse para $n = k+1$, es decir, que

$$S_{k+1} = 2^{k+1} - 1.$$

En efecto:

$$S_{k+1} = S_k + 2^{(k+1)-1} = (2^k - 1) + 2^k = 2*2^k - 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Resultado. $S_n = 2^n - 1$.

SOLUCIÓN 2.

Consideremos $2S_n - S_n$.

$$2S_n - S_n = 2^n - 1.$$

De donde:

$$S_n = 2^n - 1.$$

Resultado. $S_n = 2^n - 1$.

PROBLEMA 5.

Probar que la suma S_n de los n primeros números naturales es $\frac{n(n+1)}{2}$.

SOLUCIÓN.

Este problema difiere de los precedentes en que no es necesario buscar una hipótesis; la hipótesis se da. Simplemente debe probarse que es correcta.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n.$$

Condición 1. La hipótesis se cumple para n = 1.

Condición 2. Suponiendo que:

$$S_k = 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

Probemos que,

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

En efecto:

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Resultado. $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

PROBLEMA 6.

Probar que la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales es $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

SOLUCIÓN.

Denotemos a la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales por S_n.

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2.$$

Condición 1. La hipótesis se cumple para n = 1.

Condición 2. Suponiendo que:

$$S_k = 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

Probemos que,

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

En efecto:

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)+6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Resultado. $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

PROBLEMA 7.

Probar que:

$$S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUCIÓN.

Condición 1. Es obvio que la hipótesis se cumple para n = 1, puesto que $(-1)^0 = 1$.

Condición 2. Suponiendo que:

$$S_k = 1^2 - 2^2 + \ldots + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2},$$

Probemos que,

$$S_{k+1} = 1^2 - 2^2 + \ldots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^{k+1}(k+1)^2 = (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

En efecto:

$$S_{k+1} = S_k + (-1)^k(k+1)^2$$

$$= (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k (k+1)^2$$

$$= (-1)^k \left[(k+1) - \frac{k}{2}\right](k+1)$$

$$= (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

PROBLEMA 8.

Probar que:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

SOLUCIÓN.

Condición 1. La fórmula se cumple para $n = 1$.

Condición 2. Supóngase que:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3},$$

Entonces,

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 =$$
$$\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}.$$

PROBLEMA 9.

Probar que la suma de los cubos de los n primeros números naturales es $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

SOLUCIÓN.

Condición 1. La fórmula se cumple para $n = 1$.

Condición 2. Supóngase que:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2,$$

Entonces,

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.$$

PROBLEMA 10.
Probar que:

$$1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \qquad x \neq 1$$

.
SOLUCIÓN.
Condición 1. La fórmula se cumple para *n* = 1.
Condición 2. Supóngase que:

$$1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1},$$

Entonces,

$$1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^k + x^{k+1} = \frac{x^{k+1}-1}{x-1} + x^{k+1} = \frac{(x^{k+1}-1)+x^{k+1}(x-1)}{x-1} = \frac{x^{k+2}-1}{x-1}.$$

PROBLEMA 11.
Probar que:

$$1*2 + 2*3 + 3*4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

.
SOLUCIÓN.
Condición 1. La fórmula se cumple para *n* = 1.
Condición 2. Supóngase que:

$$1*2 + 2*3 + \ldots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{6},$$

Entonces,

$$1*2 + 2*3 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + (k+1)(k+2) =$$

$$(k+1)(k+2)(\frac{k}{3}+1) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}.$$

PROBLEMA 12.
Probar que:

$$1*2*3 + 2*3*4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

.
SOLUCIÓN.
Condición 1. La fórmula se cumple para *n* = 1.
Condición 2. Supóngase que:

$$1*2*3 + 2*3*4 + \ldots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4},$$

Entonces,

$$1*2*3 + 2*3*4 + \ldots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} +$$

$$(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}.$$

PROBLEMA 13.
Probar que:

$$\frac{1}{1*3}+\frac{1}{3*5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

.

SOLUCIÓN.

Condición 1. La fórmula se cumple para n = 1.

Condición 2. Supóngase que:

$$\frac{1}{1*3}+\frac{1}{3*5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1},$$

Entonces,

$$\frac{1}{1*3}+\frac{1}{3*5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$\frac{k+1}{(2k+3)}.$$

PROBLEMA 14.
Probar que:

$$\frac{1^2}{1*3}+\frac{2^2}{3*5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

SOLUCIÓN.

Condición 1. La fórmula se cumple para n = 1.

Condición 2. Supóngase que:

$$\frac{1^2}{1*3}+\frac{2^2}{3*5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)},$$

Entonces,

$$\frac{1^2}{1*3}+\frac{2^2}{3*5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$(k+1)\,\frac{k(2k+3)+2(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}\;.$$

PROBLEMA 15.
Probar que:

$$\frac{1}{1*4}+\frac{1}{4*7}+\frac{1}{7*10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

SOLUCIÓN.

Condición 1. La fórmula se cumple para n = 1.

Condición 2. Supóngase que:

$$\frac{1}{1*4}+\frac{1}{4*7}+\frac{1}{7*10}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1},$$

Entonces,

$$\frac{1}{1*4} + \frac{1}{4*7} + \frac{1}{7*10} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{(3k+4)}.$$

PROBLEMA 16.

Probar que:

$$\frac{1}{1*5} + \frac{1}{5*9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)*(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

SOLUCIÓN.

Condición 1. La fórmula se cumple para $n = 1$.

Condición 2. Supóngase que:

$$\frac{1}{1*5} + \frac{1}{5*9} + \dots + \frac{1}{(4k-3)*(4k+1)} = \frac{k}{4k+1},$$

Entonces,

$$\frac{1}{1*5} + \frac{1}{5*9} + \dots + \frac{1}{(4k-3)*(4k+1)} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5}.$$

PROBLEMA 17.

Probar que:

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}.$$

SOLUCIÓN.

Condición 1. La fórmula se cumple para $n = 1$.

Condición 2. Supóngase que:

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+k-1)(a+k)} = \frac{k}{a(a+k)},$$

Entonces,

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+k-1)(a+k)} + \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} = \frac{k}{a(a+k)} + \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} = \frac{k+1}{a(a+k+1)}.$$

PROBLEMA 18.

Probar que para todos los enteros no negativos n (es decir, para $n \geq 0$)

$$v_n = 2^n + 1,$$

dado que:

i. $v_0 = 2$, $v_1 = 3$

ii. Para todo número natural k, se cumple la relación $v_{k+1} = 3v_k - 2v_{k-1}$.

SOLUCIÓN.

De lo que se da, resulta evidente que la proposición se cumple para n = 0 y para n = 1. Supóngase que:

$$v_{k-1} = 2^{k-1} + 1; \; v_n = 2^n + 1.$$

Entonces se concluye que:

$$v_{k+1} = 3(2^k + 1) – 2(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1.$$

PROBLEMA 19.

Probar que:

$$u_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b},$$

si:

$$u_1 = \frac{a^2 - b^2}{a-b}, \; u_2 = \frac{a^3 - b^3}{a-b} \quad (a \neq b)$$

y si para todo número natural k>2, se cumple la siguiente relación:

$$u_k = (a + b) \; u_{k-1} = ab\, u_{k-2}.$$

SOLUCIÓN.

De lo que se da, resulta evidente que la proposición se cumple para n = 1 y para n = 2. Supóngase que:

$$u_{k-2} = \frac{a^{k-1} + b^{k-1}}{a-b}, \; u_{k-1} = \frac{a^k - b^k}{a-b}.$$

Entonces:

$$u_k = (a + b) \; \frac{a^k - b^k}{a-b} - ab\frac{a^{k-1} + b^{k-1}}{a-b} = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b}$$

PROBLEMA 20.

Hallar una expresión para la suma:

$$S_n = 1*1! + 2*2! + ... + n*n!.$$

SOLUCIÓN.

$$S_1 = 1*1! = 1,$$

$$S_2 = 1*1! + 2*2! = 5,$$

$$S_3 = 1*1! + 2*2! + 3*3! = 23,$$

$$S_4 = 1*1! + 2*2! + 3*3! + 4*4! = 119.$$

Examinando estas sumas, se observa que

$$S_1 = 2! - 1,$$

$$S_2 = 3! - 1,$$

$$S_3 = 4! -1,$$

$$S_4 = 5! -1.$$

Esto conduce a la hipótesis

$$S_n = (n + 1)! –1.$$

Verifiquemos esta hipótesis:

Condición 1. La hipótesis se cumple para n = 1, ya que

$$S_1 = 1*1! = 2! -1.$$

Condición 2. Suponiendo que:

$$S_k = 1*1! + 2*2! + ... + k*k! = (k+1)! - 1,$$

demostraremos que

$$S_{k+1} = 1*1! + 2*2! + ... + k*k! + (k+1)(k+1)! = (k+2)! - 1 .$$

En efecto,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)*(k+1)! \\ &= [(k+1)! - 1] + (k+1)*(k+1)! \\ &= (k+1)![1 + (k+1)] - 1 \\ &= (k+1)!(k+2) - 1 \\ &= (k+2)! - 1. \end{aligned}$$

PROBLEMA 21.

Probar que para todos los enteros no negativos se cumple la siguiente identidad:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} ... + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}} \qquad (x \neq 1, x \neq -1) ,$$

SOLUCIÓN.

Condición 1. Para n = 0 la fórmula toma la forma:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{1-x^2} .$$

Por lo tanto se ve que la fórmula se cumple en este caso.

Condición 2. Suponiendo que:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} ... + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}} ,$$

Entonces:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + ... + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} + \frac{2^{k+1}}{1+2^{2^{k+1}}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2k+1}} + \frac{2^{k+1}}{1+2^{2^{k+1}}}$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+2}}{1+x^{2^{k+2}}} .$$

PROBLEMA 22.

Dados los números a y b, con $a \neq b$ y $a+b \neq 1$, sean

$$a+b = m, \quad ab = l , \qquad A_2 = m - \frac{l}{m-1} ,$$

$$A_3 = m - \cfrac{l}{m - \cfrac{l}{m-1}} , \quad A_4 = m - \cfrac{l}{m - \cfrac{l}{m - \cfrac{l}{m-1}}} , \quad \text{etc.},$$

esto es, para todo k>1,

$$A_{k+1} = m - \frac{l}{A_k} .$$

Probar que

$$A_n = \frac{(a^{n+1} - b^{n+1}) - (a^n - b^n)}{(a^n - b^n) - (a^{n-1} - b^{n-1})} . \quad (1)$$

SOLUCIÓN.

Condición 1. Primero, demostraremos que la fórmula (1) se cumple para $n = 2$. Por hipótesis,

$$A_2 = m - \frac{l}{m-1} = (a+b) - \frac{ab}{(a+b)-1} = \frac{a^2 + b^2 + ab - a - b}{a+b-1} .$$

De acuerdo con la fórmula (1),

$$A_2 = \frac{(a^3 - b^3) - (a^2 - b^2)}{(a^2 - b^2) - (a - b)} .$$

Se observa que a - b es un factor tanto del numerador como del denominador de la fracción anterior; entonces se puede reducir la fracción para obtener

$$A_2 = \frac{a^2 + b^2 + ab - a - b}{a + b - 1}$$

Condición 2. Suponiendo que la fórmula (1) se cumple para $n = k$, probaremos que también debe ser verdadera para $n = k+1$. Es decir, si

$$A_k = \frac{(a^{k+1} - b^{k+1})(a^k - b^k)}{(a^k - b^k)(a^{k-1} - b^{k-1})} , \quad (2)$$

entonces:

$$A_{k+1} = \frac{(a^{k+2} - b^{k+2})(a^{k+1} - b^{k+1})}{(a^{k+1} - b^{k+1})(a^k - b^k)} .$$

En efecto,

$$A_{k+1} = m - \frac{l}{A_k} \text{ ó } A_{k+1} = (a+b) - \frac{ab}{A_k} .$$

Aplicando la igualdad (2), se obtiene

$$A_{k+1} = (a+b) - \frac{ab\left[(a^k - b^k) - (a^{k-1} - b^{k-1})\right]}{(a^{k+1} - b^{k+1}) - (a^k - b^k)}$$
$$= \frac{(a^{k+2} - b^{k+2}) - (a^{k+1} - b^{k+1})}{(a^{k+1} - b^{k+1}) - (a^k - b^k)} .$$

Esto completa la demostración.

PROBLEMA 23.

Simplificar el polinomio

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} .$$

SOLUCIÓN.

Para $n = 1$ se tiene

$$1 - \frac{x}{1!} = -\frac{x-1}{1} .$$

Para $n = 2$ se tiene

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}=-\frac{x-1}{1}+\frac{x(x-1)}{2}=\frac{(x-1)(x-2)}{2!}.$$

Para $n=3$ se tiene

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}=\frac{(x-1)(x-2)}{2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$
$$=-\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}$$

Esto sugiere la hipótesis de que

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-...+(-1)^n\frac{x(x-1)...(x-n+1)}{n!}$$
$$=(-1)^n\frac{x(x-1)...(x-k+1)}{n!}$$
$$=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)...(x-k)}{n!}$$

1) La hipótesis se cumple para $n=1$.
2) Supóngase que

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-...+(-1)^k\frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!}=(-1)^k\frac{(x-1)(x-2)...(x-k)}{k!}.$$

Entonces:

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-...+(-1)^k\frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!}+(-1)^{k+1}\frac{x(x-1)...(x-k)}{(k+1)!}$$
$$=(-1)^k\frac{(x-1)(x-2)...(x-k)}{k!}+(-1)^{k+1}\frac{x(x-1)...(x-k)}{(k+1)!}$$
$$=(-1)^{k+1}\frac{(x-1)(x-2)...(x-k)}{k!}\left[\frac{x}{k+1}-1\right]$$
$$=(-1)^{k+1}\frac{(x-1)(x-2)...(x-k)(x-k-1)}{(k+1)!}$$

PROBLEMA 24.

Probar que cualquier número entero de rublos mayor que 7 puede pagarse con billetes de 3 y 5 rublos, sin requerir vuelto.

SOLUCIÓN.

La proposición se cumple para 8 rublos: Supóngase que la proposición se cumple para algún número natural $k\geq 8$ de rublos.

Hay dos posibilidades:

1. Los k rublos se pueden pagar sólo con billetes de 3 rublos, ó
2. Entre los billetes, hay por lo menos uno de 5 rublos.

En el primer caso, el número de billetes de 3 rublos no puede ser menor que tres, para $k\geq 8$. De aquí que, para pagar $k+1$ rublos, tres billetes de 3 rublos pueden reemplazarse por dos billetes de 5 rublos.

En el segundo caso, un billete de 5 rublos puede reemplazarse por dos billetes de 3 rublos para pagar $k+1$ rublos.

PROBLEMA 25.

Probar que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos cualesquiera es divisible entre 9.

SOLUCIÓN.

La suma $1^3 + 2^3 + 3^3$ es divisible por 9. De aquí que, la proposición se cumple si el primero de los tres números consecutivos es el 1.

Supóngase que la suma $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ es divisible entre 9, siendo k algún número natural. Entonces la suma

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = \left[k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3\right] + 9(k^2 + 3k + 3)$$

es la suma de dos expresiones, cada una de las cuales es divisible por 9. De aquí que, su suma también es divisible por 9.

PROBLEMA 26.

Probar que para todo número entero no negativo *n*, la suma

$$A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

es divisible por 133.

SOLUCIÓN.

1) La fórmula se cumple para $n = 0$.
2) Supóngase que la fórmula se cumple para $n = k$; es decir, que

$$A_k = 11^{k+2} + 12^{2k+1}.$$

Es divisible por 133. Entonces

$$A_{k+1} = 11^{k+3} + 12^{2k+3}$$
$$= 11*11^{k+2} + 144*12^{2k+1}$$
$$= 11*11^{k+2} + 133*12^{2k+1} + 11*12^{2k+1}$$
$$= 11*(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133*12^{2k+1}$$
$$= 11A_k + 133*12^{2k+1}$$

PROBLEMA 27.

De entre los $2n$ números 1, 2, …, $2n$ selecciónese al azar $n+1$ números. Probar que entre los números seleccionados existen por lo menos dos números tales que uno de ellos es divisible por el otro.

SOLUCIÓN.

Supóngase que de entre los $2n$ números 1, 2, …, $2n$, donde $n \geq 2$,se han encontrado $n+1$ números tales que ninguno de ellos es divisible por cualquier otro. Denotemos este conjunto de $n+1$ números por M_{n+1}. Probemos que, en este caso, sería posible seleccionar de entre los $2n-2$ números 1, 2, …, $2n-2$, un conjunto conteniendo n números tales que ninguno de los n números sea divisible por cualquier otro.

Hay cuatro posibilidades:

1) M_{n+1} no contiene al número $2n-1$ ni al número $2n$.
2) M_{n+1} contiene a $2n-1$ pero no a $2n$.
3) M_{n+1} contiene a $2n$ pero no a $2n-1$.
4) M_{n+1} contiene tanto a $2n-1$ como a $2n$.

Caso 1. Quitemos un número arbitrario del conjunto M_{n+1}. Entonces quedan *n* números ninguno de los cuales es mayor que $2n-2$. Ninguno de éstos es divisible por cualquier otro.
Caso 2. Quitemos el número $2n-1$ del conjunto M_{n+1}. Nuevamente entre los *n* números restantes, ninguno es mayor que $2n-2$ y ninguno de ellos es divisible por otro cualquiera.
Caso 3. Quitemos el número $2n$ del conjunto M_{n+1}; el resultado es el mismo que en los casos 1 y 2.
Caso 4. Antes que todo, se observa que el número *n* no puede pertenecer al conjunto M_{n+1}; en caso contrario, el conjunto M_{n+1} contendría a dos los números *n* y $2n$; y $2n$ es divisible entre *n*.
Ahora quitemos los dos números $2n-1$ y $2n$ del conjunto M_{n+1}. Denotemos por M_{n-1} al conjunto de los $n-1$ números que quedan. A continuación se agrega el número *n* al conjunto M_{n-1}, obteniendo de este modo un conjunto de *n* números, ninguno de los cuales es mayor que $2n-2$. Falta demostrar que de estos *n* números, ninguno será divisible por cualquier otro.
Como el conjunto M_{n+1} no contuvo dos números de los cuales uno fuera divisible por el otro, el conjunto M_{n-1} tampoco contiene tales números. Por lo tanto, sólo se debe demostrar que no existe dos números tales, aún cuando se agrega el número *n* al conjunto M_{n-1}.
Para hacerlo, basta demostrar

1. Que ningún número en M_{n-1} es divisible por *n* y
2. Que *n* no es divisible por número alguno en M_{n-1}.

La primera proposición se deduce del hecho de que de los números en M_{n-1}, ninguno es mayor que $2n-2$. La segunda se deduce del hecho de que $2n$ no es divisible por número alguno de en M_{n-1}. Así se ha demostrado que si la proposición es falsa para los $2(n-1)$ números 1, 2, …, $2n-2$. De aquí que, si la proposición es verdadera para los $2(n-1)$ números 1, 2, …, $2n-2$, también debe ser verdadera para los $2n$ números 1, 2, …, $2n$.
La proposición es verdadera para los dos números 1 y 2; de aquí que es verdadera para todos los conjuntos de $2n$ números 1, 2, …, $2n$, donde *n* es un número natural.

PROBLEMA 28.

Probar que *n* rectas diferentes que se encuentran en un plano y pasan por un punto en común, dividen el plano en $2n$ partes.
SOLUCIÓN.
La proposición es verdadera para el caso $n=1$, ya que una recta divide al plano en dos partes.
Supóngase que *k* rectas diferentes que pasan por un punto dado dividen al plano en $2k$ partes. Entonces si se tiene una $(k+1)-ésima$ recta que también pasa por el punto dado, ésta dividirá en dos a dos de las partes originales. De aquí que el plano se dividirá en $2(k+1)$ partes.

PROBLEMA 29.

Probar que n rectas que se encuentran en un plano dividen el plano en regiones que pueden colorearse blanco y negro, en forma que dos regiones vecinas cualesquiera (o sea, regiones cuya frontera es un segmento rectilíneo común) tienen colores diferentes.

SOLUCIÓN.

1) La recta AB divide al plano P en dos semiplanos, P_1 y P_2. Coloréese P_1 en blanco y P_2 en negro, para satisfacer los requisitos del problema. Así, se ve que la proposición es verdadera para $n=1$.
2) Supóngase que la proposición se cumple para $n=k$ y supóngase que se ha coloreado el plano P de acuerdo con los requisitos del problema. Considérese que la $(k+1)-ésima$ recta CD divide el plano en dos semiplanos Q_1 y Q_2. En todo Q_1 no alteramos el color: sin embargo, en Q_2 reemplazamos el blanco por el negro y el negro por el blanco.

   Ahora sean O_1 y O_2 dos regiones vecinas cualesquiera de la figura después de que se trazó la recta CD. Existen dos posibilidades para considerar:

   a) O_1 y O_2 se encuentran en lados opuestos de CD.

   b) O_1 y O_2 se encuentran del mismo lado de CD.

   En el primer caso, O_1 y O_2 deben haber formado una sola región antes de que se trazara la recta CD y, por tanto, tenían el mismo color. Después de que se trazó CD, aquella quedó en Q_1 y mantuvo su coloración, mientras que la que resultó en Q_2 ha cambiado su coloración.

   En el segundo caso, antes de que se trazara CD, O_1 y O_2 eran parte de dos regiones vecinas diferentes cuya frontera común era una de las k rectas originales; en consecuencia, deben haber tenido colores diferentes. Si después de haber trazado CD, ambas quedaron en Q_1, el color de cada una no cambió. Si, por otra parte, ambas quedaron en Q_2, se cambió el color de cada una. En cualquiera de los casos, O_1 y O_2 tienen colores diferentes.

PROBLEMA 30.

Probar que n planos que pasan por un punto en común, sin que tres cualesquiera de ellos se intercepten en la misma recta, dividen al espacio en $A_n = n(n-1)+2$ partes.

SOLUCIÓN.

1) Un plano divide al espacio en dos partes, y $A_1 = 2$. De aquí que la proposición se cumple para $n=1$.
2) Supóngase que la proposición se cumple para $n=k$, es decir que k planos dividen al espacio en $k(k-1)+2$ partes. Probemos que entonces $k+1$ planos deben dividir al espacio en $k(k+1)+2$ partes.

Sea P el $(k+1)-ésimo$ plano. P se interseca con cada uno de los otros planos en una recta y todas estas k rectas se intersactan en el punto que es común a todos los planos. Aplicando el resultado del problema 28, se ve que el plano P queda dividido en $2k$ partes, cada una de las cuales está encerrada por un ángulo plano con su vértice en el punto común de intersección. Los primeros k planos dividen el espacio en varios ángulos poliedros. El plano P divide algunos de estos ángulos poliedros en dos partes. La cara común a esas dos partes es aquella porción del plano que está limitada por las dos semirrectas a lo largo de las cuales P se intersaca con las caras del ángulo poliedro dado, es decir, uno de los $2k$ ángulos planos en los cuales se divide el plano P. Esto significa que el número de ángulos poliedros cortados en dos por el plano P no puede ser menor que $2k$.

Por otra parte, cada una de las dos partes, en las cuales se divide el plano P como resultado de su intersección con el primer plano, divide así el ángulo poliedro formado por los primeros k planos en dos partes. Esto significa que el número de ángulos poliedros cortados en dos por el plano P no puede ser menor que $2k$.

Entonces, el plano P divide en 2 partes exactamente a $2k$ de los ángulos poliedros formados por los primeros k planos. En consecuencia, si k planos dividen el espacio en $k(k-1)+2$ partes, entonces $k+1$ planos dividen el espacio en

$$\left[k(k-1)+2\right]+2k = k(k+1)+2$$

partes. De donde se ha probado la proposición.

PROBLEMA 31.

Probar la identidad:

$$\cos q \cos 2q \cos 4q \ldots \cos 2^n q = \frac{sen 2^{n+1} q}{2^{n+1} sen q}.$$

SOLUCIÓN.

1) La fórmula se cumple para $n=0$, ya que

$$\cos q = \frac{sen 2q}{2 sen q}$$

2) Supóngase que la fórmula se cumple para $n=k$; es decir, que

$$\cos q \cos 2q \cos 4q \ldots \cos 2^k q = \frac{sen 2^{k+1} q}{2^{k+1} sen q}$$

Entonces debe demostrarse que la fórmula también se cumple para $n=k+1$. En efecto,

$$\cos q \cos 2q \cos 4q \ldots \cos 2^k q \cos 2^{k+1} q$$
$$= \frac{sen 2^{k+1} q \cos 2^{k+1} q}{2^{k+1} sen q}$$
$$= \frac{sen 2^{k+2} q}{2^{k+2} sen q}$$

PROBLEMA 32.

Dado que $A_1 = \cos q$, $A_2 = \cos 2q$, y que, para todo número natural $k > 2$,

$$A_k = 2A_{k-1} c \cos q - A_{k-2};$$

probar que

$$A_n = \cos nq .$$

SOLUCIÓN.

1) La fórmula se cumple para $n=1$ y $n=2$.
2) Supóngase que

$$A_{k-2} = \cos(k-2)q , \ A_{k-1} = \cos(k-1)q .$$

Entonces

$$A_k = 2\cos q\,\cos(k-1)q - \cos(k-2)q = \cos kq\,.$$

(Aquí se aplica la identidad $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, haciendo $a = (k-1)q\,, b = q$.)

PROBLEMA 33.

Probar que

$$senx + sen2x + ... + sennx = \frac{sen\frac{n+1}{2}x}{sen\frac{x}{2}}\,sen\frac{nx}{2}\ .$$

SOLUCIÓN.

1) La fórmula se cumple para $n = 1$.
2) Supóngase que

$$senx + sen2x + ... + senkx = \frac{sen\frac{k+1}{2}x}{sen\frac{x}{2}}\,sen\frac{kx}{2}\,,$$

Entonces

$$senx + sen2x + ... + senkx + sen(k+1)x$$

$$= \frac{sen\frac{k+1}{2}x}{sen\frac{x}{2}}\,sen\frac{kx}{2} + sen(k+1)x$$

$$= \frac{sen\frac{k+1}{2}}{sen\frac{x}{2}} + 2sen\frac{k+1}{2}x\cos\frac{k+1}{2}x$$

$$= \frac{sen\frac{k+2}{2}}{sen\frac{x}{2}}\,2sen\frac{k+1}{2}x$$

PROBLEMA 34.

Probar que

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \frac{sen\frac{2n+1}{2}x}{2sen\frac{x}{2}}\ .$$

SOLUCIÓN.

1) La fórmula se cumple para $n = 1$, ya que

$$\frac{sen\frac{3x}{2}}{2sen\frac{x}{2}} = \frac{sen\frac{x}{2} + \left(sen\frac{3x}{2} - sen\frac{x}{2}\right)}{2sen\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \cos x\,.$$

2) Supóngase que

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos kx=\frac{sen\frac{2k+1}{2}x}{2sen\frac{x}{2}},$$

Entonces

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos kx+\cos(k+1)x$$

$$=\frac{sen\frac{2k+1}{2}x}{2sen\frac{x}{2}}+\cos(k+1)x$$

$$=\frac{sen\frac{2k+1}{2}x+2sen\frac{x}{2}\cos(k+1)x}{2sen\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{sen\frac{2k+1}{2}x+\left(sen\frac{2k+3}{2}x-sen\frac{2k+1}{2}x\right)}{2sen\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{sen\frac{2k+3}{2}x}{2sen\frac{x}{2}}$$

PROBLEMA 35.

Probar que

$$senx+2sen2x+\ldots+nsennx=\frac{(n+1)sennx-nsen(n+1)x}{4sen^2\frac{x}{2}}.$$

SOLUCIÓN.

1) La fórmula se cumple para $n=1$, ya que

$$\frac{2senx - sen2x}{4sen^2\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{2senx(1-\cos x)}{4sen^2\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{2senx\left[1-\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{4sen^2\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{2senx\left[1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+sen^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{4sen^2\frac{x}{2}}$$
$$= senx$$

2) Supóngase que

$$senx + 2sen2x + ... + ksenkx = \frac{(k+1)senkx - ksen(k+1)x}{4sen^2\frac{x}{2}},$$

Entonces

$$senx+2sen2x+...+ksenkx+(k+1)sen(k+1)x$$
$$= \frac{(k+1)senkx - ksen(k+1)x}{4sen^2\frac{x}{2}} + (k+1)sen(k+1)x$$
$$= \frac{(k+1)senkx - ksen(k+1)x + 2(k+1)sen(k+1)x(1-\cos x)}{4sen^2\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{(k+2)sen(k+1)x + (k+1)senkx}{4sen^2\frac{x}{2}} - \frac{2(k+1)\cos xsen(k+1)x}{4sen^2\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{(k+2)sen(k+1)x + (k+1)senkx}{4sen^2\frac{x}{2}} - \frac{(k+1)\left[sen(k+2)x + senkx\right]}{4sen^2\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{(k+2)sen(k+1)x - (k+1)sen(k+2)x}{4sen^2\frac{x}{2}}$$

PROBLEMA 36.

Probar que

$$\cos x + 2\cos 2x + ... + n\cos nx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4sen^2\frac{x}{2}}.$$

SOLUCIÓN.

1) La fórmula se cumple para $n=1$, ya que

$$\frac{2\cos x-\cos 2x-1}{4sen^2\frac{x}{2}}=\frac{2\cos x-2\cos^2 x}{4sen^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos x(1-\cos x)}{4sen^2\frac{x}{2}}$$

2) Supóngase que

$$\cos x+2\cos 2x+\ldots+k\cos kx=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4sen^2\frac{x}{2}},$$

Entonces

$$\cos x+2\cos 2x+\ldots+k\cos kx+(k+1)\cos(k+1)x$$

$$=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4sen^2\frac{x}{2}}+(k+1)\cos(k+1)x$$

$$=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4sen^2\frac{x}{2}}+\frac{2(k+1)\cos(k+1)x(1-\cos x)}{4sen^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)x+(k+1)\cos kx}{4sen^2\frac{x}{2}}-\frac{2(k+1)\cos x\cos(k+1)x+1}{4sen^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)x+(k+1)\cos kx}{4sen^2\frac{x}{2}}-\frac{(k+1)\left[\cos(k+2)x+\cos kx\right]+1}{4sen^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)x-(k+1)\cos(k+2)x-1}{4sen^2\frac{x}{2}}$$

PROBLEMA 37.

Probar que

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x.$$

SOLUCIÓN.

1) La fórmula se cumple para $n=1$, ya que

$$\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\cot x=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}=\frac{\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}$$

2) Supóngase que

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k}-\cot x,$$

Entonces

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{x}{2^{k+1}}$$
$$=\frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k}-\cot x+\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{x}{2^{k+1}}$$
$$=\frac{1}{2^{k+1}}\frac{\cot^2\frac{x}{2^{k+1}}-1}{\cot\frac{x}{2^{k+1}}}+\frac{1}{2^{k+1}\cot\frac{x}{2^{k+1}}}$$
$$=\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{x}{2^{k+1}}-\cot x$$

PROBLEMA 38.

Probar que

$$arc\cot 3+arc\cot 5+\ldots+arc\ \text{ccottan}(2n+1)=\arctan 2+\arctan\frac{3}{2}+\ldots+\arctan\frac{n+1}{n}-n\arctan 1$$

SOLUCIÓN.

1) Como

$$\tan(\arctan 2-\arctan 1)=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3},$$

se concluye que

$$\arctan 2+\arctan 1=\arctan\frac{1}{3}=arc\cot 3.$$

De aquí que la fórmula se cumple para $n=1$.

2) Primero probaremos que

$$arc\cot(2k+3)=\arctan\frac{k+2}{k+1}-\arctan 1. \qquad (1)$$

En efecto,

$$\tan\left(\arctan\frac{k+2}{k+1}-\arctan 1\right)=\frac{\frac{k+2}{k+1}-1}{1+\frac{k+2}{k+1}}=\frac{1}{2k+3}.$$

De aquí que,

$$\arctan\frac{1}{2k+3}=arc\cot(2k+3)=\arctan\frac{k+2}{k+1}-\arctan 1.$$

Supóngase que la fórmula se cumple para $n=k$; es decir,

$$arc\cot 3+arc\cot 5+\ldots+arc\ \text{ccottan}(2k+1)$$
$$=\arctan 2+\arctan\frac{3}{2}+\ldots+\arctan\frac{k+1}{k}-k\arctan 1. \qquad (2)$$

Entonces, probemos ahora que la fórmula se cumple para $n=k+1$; es decir que,

$$arc\cot 3+arc\cot 5+\ldots+arc\ \text{ccottan}(2k+3)$$
$$=\arctan 2+\arctan\frac{3}{2}+\ldots+\arctan\frac{k+2}{k+1}-(k+1)\arctan 1. \qquad (3)$$

Sumando término a término las igualdades (1) y (2) se obtiene la igualdad (3).

PROBLEMA 39.

Probar que

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{np}{4}+isen\frac{np}{4}\right).$$

SOLUCIÓN.

1) La igualdad se cumple para $n=1$, puesto que

$$1+i = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{p}{4}+isen\frac{p}{4}\right).$$

2) Supóngase que

$$(1+i)^k = 2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{kp}{4}+isen\frac{kp}{4}\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned}(1+i)^{k+1} &= 2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{kp}{4}+isen\frac{kp}{4}\right)*2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{p}{4}+isen\frac{p}{4}\right)\\ &= 2^{\frac{k+1}{2}}\left(\cos\frac{(k+1)p}{4}+isen\frac{(k+1)p}{4}\right)\end{aligned}.$$

PROBLEMA 40.

Probar que

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^n = 2^n\left(\cos\frac{np}{6}-isen\frac{np}{6}\right).$$

SOLUCIÓN.

1) La fórmula se cumple para $n=1$,ya que

$$\left(\sqrt{3}-i\right) = 2\left(\cos\frac{p}{6}-isen\frac{p}{6}\right).$$

2) Supóngase que

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^k = 2^k\left(\cos\frac{kp}{6}-isen\frac{kp}{6}\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-i\right)^{k+1} &= 2^k\left(\cos\frac{kp}{6}-isen\frac{kp}{6}\right)*2\left(\cos\frac{p}{6}-isen\frac{p}{6}\right)\\ &= 2^{k+1}\left[\cos\frac{(k+1)p}{6}-isen\frac{(k+1)p}{6}\right]\end{aligned}.$$

PROBLEMA 41.

Probar el siguiente teorema: Si la aplicación de un número finito de operaciones racionales (es decir, adición, sustracción, multiplicación y división) a los números complejos $X_1, X_2, ..., X_n$ conducen la número Y, entonces la aplicación de las mismas operaciones en el mismo orden de suseción a los complejos conjugados $\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_n$ conduce al número $\overline{Y}$, que es el conjugado de Y.

SOLUCIÓN.

Primero demostraremos que el teorema se cumple para cada una de las cuatro operaciones aplicadas simplemente a los dos números complejos. Sean

$$X_1 = a + bi, X_2 = c + di .$$

Entonces

$$X_1 + X_2 = (a + c) + (b + d)i = Y;$$

$$\overline{X}_1 + \overline{X}_2 = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \overline{Y} .$$

El teorema puede verificarse exactamente en la misma forma para la substracción, multiplicación y división.

Ahora, sea dada una expresión racional que contiene a los números complejos. Como es bien sabido, para simplificar una expresión de este tipo basta aplicar sucesivamente las cuatro operaciones racionales sobre dos complejos, y efectuar dichas operaciones en determinado orden.

Por ejemplo, sea

$$Y = \frac{X_1 X_2 + X_3 X_4}{X_1 + X_2 - X_3} .$$

Para calcular Y, se pueden llevar a cabo las operaciones siguientes en el orden indicado:

$$1) X_1 X_2 = Y_1$$
$$2) X_3 X_4 = Y_2$$
$$3) X_1 + X_2 = Y_3$$
$$4) Y_3 - X_3 = Y_4$$
$$5) Y_1 + Y_2 = Y_5$$
$$6) \frac{Y_5}{Y_4} = Y$$

Supóngase que el teorema se cumple para todas las expresiones racionales cuya simplificación requiere no más de *k* aplicaciones de las “operaciones”. Demostraremos que, en este caso, el teorema también debe cumplirse para expresiones que requieren la aplicación de no más de *k+1* aplicaciones de las “operaciones”. Si los números $X_1, X_2, ..., X_n$ se reemplazan por sus complejos conjugados, los números Y_i y Y_j se reemplazan por sus complejos conjugados: $\overline{Y}_i$ y $\overline{Y}_j$, y la (k+1)-ésima “operación” aplicada a $\overline{Y}_i$ y $\overline{Y}_j$ da el número $\overline{Y}$, el complejo conjugado de Y.

PROBLEMA 42.

Probar que para todo número natural *n*,

$$(\cos x + isenx)^n = \cos nx + isennx .$$

SOLUCIÓN.

1. La fórmula se cumple para $n=1$.
2. Supóngase que

$$(\cos + isenx)^k = \cos kx + isenkx.$$

Entonces $(\cos + isenx)^{k+1} = (\cos kx + isenkx)(\cos x + isenx) = \cos(k+1)x + isen(k+1)x$.

PROBLEMA 43.

Probar que para todos los números naturales *n>1*,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

SOLUCIÓN.

Designemos por S_n a la expresión del primer miembro de la desigualdad.

1. $S_2=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}$, de modo que la desigualdad se cumple para n=2.
2. Supóngase que $S_k>\frac{13}{24}$ para algún número *k*. Probemos que en este caso también debe tenerse $S_k>\frac{13}{24}$. Se tiene

$$S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}$$

$$S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

Restando S_k de S_{k+1}, se obtiene

$$S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1},$$

Es decir,

$$S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}.$$

Para cualquier número natural *k*, la expresión del segundo miembro de la última igualdad es positiva. De aquí, que $S_{k+1}>S_k$. Pero $S_k>\frac{13}{24}$; de aquí que también, $S_k>\frac{13}{24}$.

PROBLEMA 44.

Hallar el error en la siguiente "demostración".

PROPOSICIÓN. Para todo número natural *n* se cumple la siguiente desigualdad:

$$2^n>2n+1.$$

Demostración.

Supóngase que la desigualdad se cumple para algún número natural *n=k*; esto es, supóngase que

$$2^k>2k+1. \qquad (1)$$

Probemos que esto también se cumple para *n=k+1*; es decir,

$$2^k > 2(k+1)+1. \quad (2)$$

Para todo número natural *k*, 2^k no es menor que 2. Agreguemos 2^k al primer miembro de la desigualdad (1), y agreguemos 2 al segundo miembro. Esto proporciona la desigualdad

$$2^k + 2^k > 2k+1+2$$

O bien,

$$2^k > 2(k+1)+1.$$

Esto prueba la desigualdad.

SOLUCIÓN.

El error está precisamente en la última frase: "Esto prueba la desigualdad". De hecho, simplemente se ha demostrado que la desigualdad

$$2^n > 2n+1$$

Se cumple para $n = k+1$, si se cumple para $n = k$. En otras palabras, el error consiste en probar sólo la condición 1 y no la 2.

PROBLEMA 45

¿Para cuáles números naturales *n* se cumple la desigualdad $2^n > 2n+1$?

SOLUCIÓN.

Fácilmente se observa que 3 es el menor número natural para el cual se cumple la desigualdad.

Tomando en consideración que la validez para $n = k$ implica su validez para $n = k+1$ (problema 44), se concluye que la desigualdad se cumple para todo número natural $n \geq 3$.

PROBLEMA 46

¿Para cuáles números naturales *n* se cumple la desigualdad $2^n > n^2$?

SOLUCIÓN.

La desigualdad se cumple para $n = 1$, ya que $2^1 > 1^2$.

La desigualdad no se cumple para $n = 2$, ya que $2^2 = 2^2$.

La desigualdad no se cumple para $n = 3$, ya que $2^3 < 3^2$.

La desigualdad no se cumple para $n = 4$, ya que $2^4 = 4^2$.

La desigualdad se cumple para $n = 5$, ya que $2^5 > 5^2$.

La desigualdad se cumple para $n = 6$, ya que $2^6 > 6^2$.

Aparentemente la desigualdad se cumple para $n = 1$ y para todo $n > 4$. Probaremos esto.

1. La desigualdad se cumple para $n = 5$.
2. Supóngase que para algún número natural $k > 4$,

$$2^k > k^2. \quad (1)$$

Probemos que

$$2^{k+1} > (k+1)^2 \quad (2)$$

Se sabe que $2^k > 2k+1$ para $k > 4$ (problema 45). De aquí que, sumando 2^k al primer miembro y $2k+1$ de la desigualdad (1) se obtiene la desigualdad (2).

Resultado. $2^n > n^2$ para $n = 1$ y para todo $n > 4$.

PROBLEMA 47

Probar que

$$(1+a)^n > 1+na,$$

Donde $a > -1, a \neq 0, n > 1$.

SOLUCIÓN.

1. La desigualdad se cumple para $n = 2$.
2. Supóngase que la desigualdad se cumple para un algún número natural $n = k$; es decir,

$$(1+a)^k > 1+ka. \qquad (1)$$

Probemos que aquí también se cumple la desigualdad para $n = k+1$; es decir,

$$(1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a.$$

De acuerdo a la hipótesis original, $1+a > 0$; por tanto, la multiplicación de ambos miembros de la desigualdad (1) por $1+a$ proporciona la desigualdad válida

$$(1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a+ka^2.$$

Eliminando el término positivo ka^2 del segundo miembro de la última desigualdad, se obtiene la desigualdad (2).

PROBLEMA 48

Probar que para todo número natural n>1,

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

SOLUCIÓN.

1. La fórmula se cumple para $n = 2$, ya que

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}.$$

2. Suponiendo que

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}, \qquad (1)$$

Probaremos que

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}. \qquad (2)$$

Para todo $k > 0$, se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}-\sqrt{k}. \qquad (3)$$

En efecto, la desigualdad (3), se obtiene a partir de la desigualdad

$$1+\sqrt{\frac{k}{k+1}} > 1,$$

Multiplicando ambos miembros por $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. Sumando término a término las desigualdades (1) y (3), se obtiene la desigualdad (2).

PROBLEMA 49

Probar que para todo número natural n>1,

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

SOLUCIÓN.

1. La desigualdad se cumple para $n=2$, ya que $\frac{16}{3}<6$.
2. Supóngase que

$$\frac{4^k}{k+1}<\frac{(2k)!}{(k!)^2},$$

Donde $k\geq 2$. Es fácil probar que para $k>0$

$$\frac{4(k+1)}{k+2}<\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}.$$

De aquí que

$$\frac{4^k}{k+1}\frac{4(k+1)}{k+2}<\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$$

Es decir,

$$\frac{4^{k+1}}{k+2}<\frac{(2k+2)!}{(k+1)^2}.$$

PROBLEMA 50

Probar que

$$2^{n-1}(a^n+b^n)>(a+b)^n, \qquad (1)$$

Donde $a+b>0, a\neq b, n>1$.

SOLUCIÓN.

1. Para $n=2$, la desigualdad (1) toma la forma

$$2(a^2+b^2)>(a+b)^2. \qquad (2)$$

Como $a\neq b$, se tiene la desigualdad

$$(a-b)^2>0. \qquad (3)$$

Sumando $(a+b)^2$ a cada miembro de la desigualdad (3) se obtiene la desigualdad (2). Esto prueba que la desigualdad (1) se cumple para $n=2$.

2. Supóngase que la desigualdad (1) se cumple para algún número natural $n=k$; esto es,

$$2^{k-1}(a^k+b^k)>(a+b)^k. \qquad (4)$$

Probemos entonces que la desigualdad (1) debe cumplirse para $n=k+1$; es decir,

$$2^k(a^{k+1}+b^{k+1})>(a+b)^{k+1} \qquad (5)$$

Multipliquemos ambos miembros de la desigualdad (4) por $a+b$. Puesto que por la hipótesis original, $a+b>0$, se obtiene la desigualdad siguiente:

$$2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)>(a+b)^{k+1}.$$

Para probar la desigualdad (5) es suficiente probar que

$$2^k(a^{k+1}+b^{k+1})>2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b), \quad (7)$$

Lo cual es equivalente a

$$a^{k+1}+b^{k+1}>a^kb+ab^k. \qquad (8)$$

La desigualdad (8) puede escribirse en la forma

$$(a^k-b^k)(a-b)>0. \qquad (9)$$

Supóngase que $a>b$. Entonces, de la hipótesis de que $a>0$, se concluye que $a>|b|$; por lo tanto, $a^k>b^k$. De donde el primer miembro de la desigualdad (9) es el producto de dos números positivos. Si $a < b$, entonces por un razonamiento semejante, se ve que $a^k < b^k$. En este caso, el primer miembro de la desigualdad (9) es el producto de dos números negativos. En todo caso se cumple la desigualdad (9).

PROBLEMA 51

Probar que para todo x>0 y para todo número natural n, se cumple la desigualdad siguiente:

$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + ... + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n+1. \qquad (1)$$

SOLUCIÓN.

1. Para $n = 1$, la desigualdad (1) toma la forma

$$x + \frac{1}{x} \geq 2. \qquad (2)$$

Para $n = 2$ desigualdad (1) toma la forma

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 3. \qquad (3)$$

Como la desigualdad (2) se cumple para todo $x > 0$, también se cumple si se reemplaza x por x^2, es decir,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2.$$

Sumando 1 a ambos miembros de la última desigualdad, se obtiene la desigualdad (3).

2. Supóngase que se cumple la desigualdad (1) para $n = k$; es decir,

$$x^k + x^{k-2} + x^{k-4} + ... + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} \geq k+1. \qquad (4)$$

Demostraremos que, entonces, también debe cumplirse la desigualdad (1) para $n = k+2$; es decir,

$$x^{k+2} + x^k + x^{k-2} + ... + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} \geq k+3. \qquad (5)$$

Reemplazando x por x^{k+2} en la desigualdad (2), se obtiene

$$x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} \geq 2.$$

Sumando término a término las desigualdades (4) y (6), se obtiene la desigualdad (5).

PROBLEMA 52

Probar que para cualesquiera números positivos $a_1, a_2, ..., a_n$,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \qquad (1)$$

SOLUCIÓN.

1. Para $n = 2$, la desigualdad (1) toma la forma

$$\sqrt[2]{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}. \qquad (2)$$

Para números arbitrarios a_1, a_2, se cumple la desigualdad siguiente:

$$\left(\sqrt[2]{a_1}-\sqrt[2]{a_2}\right)^2 \geq 0 .$$

De esta desigualdad es fácil obtener la desigualdad (2).

2. Supóngase que la desigualdad (1) se cumple para $n=k$ y pruébese que entonces se cumple para $n=2k$.

$$\sqrt[2k]{a_1a_2...a_{2k}} = \sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2...a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}...a_{2k}}}$$

$$\leq \frac{\sqrt[k]{a_1a_2...a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}...a_{2k}}}{2}$$

$$\leq \frac{\dfrac{a_1+a_2+...+a_k}{k}+\dfrac{a_{k+1}+a_{k+2}+...+a_{2k}}{k}}{2} .$$

$$= \frac{a_1+a_2+...+a_{2k}}{2k}$$

Se puede afirmar que la desigualdad se cumple para todo $n=2^s$.

Para probar que la desigualdad (1) se cumple para todos los números naturales *n*, demostraremos que de su validez para *n*=*k* se deduce su validez para *n*=*k*-*1*. Sean $a_1, a_2, ..., a_{k-1}$, números positivos arbitrarios y γ otro número positivo hasta ahora indeterminado. Entonces,

$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_{k-1}\gamma} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_{k-1}+\gamma}{k}$$

Selecciónese $\gamma = \dfrac{a_1+a_2+...+a_{k-1}}{k-1}$.

Entonces se obtiene

$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_{k-1}\frac{a_1+a_2+...+a_{k-1}}{k-1}} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_{k-1}}{k-1} ,$$

O bien,

$$\sqrt[k-1]{a_1a_2...a_{k-1}} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_{k-1}}{k-1} .$$

Ahora sea *m* un número natural arbitrario. Si $m=2^s$ para algún número natural *s*, entonces la desigualdad (1) se cumple. En otro caso, se puede hallar un número natural *s* tal que $m<2^s$. Entonces, se puede aseverar que la desigualdad también se cumple para $n=m$.

PROBLEMA 53.

Demuestra que $a^{2n}-b^{2n}$ es divisible por $a+b$ para todo número natural *n*.

SOLUCIÓN.

1. La condición se cumple para $n=1$, dado que: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
2. Supongamos que la condición se cumple para un natural arbitrario *n*=*k*. Es decir,

$a^{2k}-b^{2k}$ es divisible por $a+b$.

Veremos que la condición se cumple para $n=k+1$.

$$\begin{aligned} & a^{2(k+1)}-b^{2(k+1)} \\ &= a^{2k+2}-b^{2k+2} \\ &= a^{2k}a^2-b^{2k}b^2 \\ &= a^{2k}a^2-a^2b^{2k}+a^2b^{2k}+b^{2k}b^2 \\ &= a^2\left(a^{2k}-b^{2k}\right)+b^{2k}\left(a^2-b^2\right) \end{aligned}$$

Dado que $a^{2k}-b^{2k}$ es divisible por $a+b$ y a^2-b^2 es divisible por $a+b$, resulta que $a^{2(k+1)}-b^{2(k+1)}$ es divisible por $a+b$.

PROBLEMA 54.

Demuestra que $a^{2n-1}+b^{2n-1}$ es divisible por $a+b$ para todo número natural *n*.

SOLUCIÓN.

1. La condición se cumple para $n=1$, dado que: $a^{2-1}+b^{2-1}=a+b$.
2. Supongamos que la condición se cumple para un natural arbitrario *n*=*k*. Es decir,

$a^{2k}+b^{2k}$ es divisible por $a+b$.

Veremos que la condición se cumple para $n=k+1$.

$$\begin{aligned} & a^{2(k+1)-1}+b^{2(k+1)-1} \\ &= a^{2(k-1)+2}-b^{2(k-1)+2} \\ &= a^{2k-1}a^2-a^2b^{2k-1}+a^2b^{2k-1}+b^{2k-1}b^2 \\ &= a^2\left(a^{2k-1}-b^{2k-1}\right)+b^{2k-1}\left(a^2-b^2\right) \end{aligned}$$

Dado que $a^{2k}-b^{2k}$ es divisible por $a+b$ y $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ es divisible por $a+b$, resulta que $a^{2(k+1)-1}+b^{2(k+1)-1}$ es divisible por $a+b$.

PROBLEMA 55.

Demuestra que a^n-b^n es divisible por $a-b$ para todo número natural *n*.

SOLUCIÓN.

1. La condición se cumple para $n=1$, dado que: $a^1+b^1=a+b$.
2. Supongamos que la condición se cumple para un natural arbitrario *n*=*k*. Es decir,

$$a^k-b^k \text{ es divisible por } a-b.$$

Veremos que la condición se cumple para $n=k+1$.

$$\begin{aligned} &a^{k+1}+b^{k+1}\\ &=a^k a-b^k b\\ &=a^k a-ab^k+ab^k-b^k b\\ &=a\left(a^k-b^k\right)+b^k\left(a-b\right)\end{aligned}$$

Dado que a^k-b^k es divisible por $a-b$ y $a-b$ es divisible por $a-b$, resulta que $a^{k+1}+b^{k+1}$ es divisible por $a-b$.

PROBLEMA 56.

Demuestra que par todo número natural n $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1})\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN.

1. La condición se cumple para $n=1$, dado que: $x^1-y^1=x-y$.
2. Supongamos que la condición se cumple para un natural arbitrario *n*=*k*. Es decir,

$$x^k-y^k=(x-y)(x^{k-1}+x^{k-2}y+...+xy^{k-2}+y^{k-1}).$$

Veremos que la condición se cumple para $n=k+1$.

$$\begin{aligned} &x^{k+1}-y^{k+1}\\ &=x^k x-y^k y\\ &=x^k x-xy^k+xy^k-y^k y\\ &=x\left(x^k-y^k\right)+y^k\left(x-y\right)\\ &=x\left(x-y\right)\left(x^{k-1}+x^{k-2}y+...+xy^{k-2}+y^{k-1}\right)+y^k\left(x-y\right) .\\ &=\left(x-y\right)\left(xx^{k-1}+xx^{k-2}y+...+xxy^{k-2}+xy^{k-1}\right)+y^k(x-y)\\ &=(x-y)(xx^{k-1}+xx^{k-2}y+...+xxy^{k-2}+xy^{k-1}+y^k)\\ &=(x-y)(x^k+x^{k-1}y+...+xy^{k-1}+y^k)\end{aligned}$$

PROBLEMA 57.

Demuestra que si n es un número natural y $n \geq 2$ y $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, entonces $\left|x_1 + x_2 + ... + x_n\right| \leq \left|x_1\right| + \left|x_2\right| + ... + \left|x_n\right|$.

SOLUCIÓN.

1. La condición se cumple para $n = 2$, por la desigualdad del triángulo.
2. Supongamos que la condición se cumple para un natural arbitrario *n*=*k*. Es decir,

$$\left|x_1 + x_2 + ... + x_k\right| \leq \left|x_1\right| + \left|x_2\right| + ... + \left|x_k\right|.$$

Veremos que la condición se cumple para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} &\left|x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1}\right| \\ &= \left|\left(x_1 + x_2 + ... + x_k\right) + x_{k+1}\right| \\ &\leq \left|x_1 + x_2 + ... + x_k\right| + \left|x_{k+1}\right| \\ &\leq \left(\left|x_1\right| + \left|x_2\right| + ... + \left|x_k\right|\right) + \left|x_{k+1}\right| \\ &= \left|x_1\right| + \left|x_2\right| + ... + \left|x_k\right| + \left|x_{k+1}\right| \end{aligned} .$$

PROBLEMA 58.

Demuestra que si $n^2 + 3n$ es divisible por 2, para todo *n* natural.

SOLUCIÓN.

1. La condición se cumple para $n = 1$, dado que $1^2 + 3 = 4$ es divisible por 2.
2. Supongamos que la condición se cumple para un natural arbitrario *n*=*k*. Es decir,

$k^2 + 3k$ es divisible por 2. (Es decir, $k^2 + 3k = 2p$)

Veremos que la condición se cumple para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} &(k+1)^2 + 3(k+1) \\ &= k^2 + 2k + 1 + 3k + 3 \\ &= k^2 + 3k + 2k + 4 \\ &= k^2 + 3k + 2(k+2) \\ &= 2p + 2(k+2) \\ &= 2(p + k + 2) \end{aligned} ,$$

Que es divisible por 2.

PROBLEMA 59.

Demuestra que $(n+1)(3n+6)$ es divisible por 6, para todo *n* natural.

SOLUCIÓN.

1. La condición se cumple para $n = 1$, dado que $(1+1)(3+6) = 18$ es divisible por 6.

2. Supongamos que la condición se cumple para un natural arbitrario *n*=*k*. Es decir, $(k+1)(3k+6)$ es divisible por 6. (Es decir, $(k+1)(3k+6)=6p$)

Veremos que la condición se cumple para $n=k+1$.

$$\begin{aligned}
&\left[(k+1)+1\right]\left[3(k+1)+6\right] \\
&=\left(k+2\right)\left(3k+9\right) \\
&=3k^2+9k+6k+18 \\
&=3k^2+9k+6k+6+12 \\
&=\left(3k^2+9k+6\right)+6k+12 \\
&=\left(3k^2+6k+3k+6\right)+6k+12 \\
&=\left[3k(k+1)+6(k+1)\right]+6(k+2) \\
&=(k+1)(3k+6)+6(k+2) \\
&=6p+6(k+2) \\
&=6(p+k+2)
\end{aligned},$$

Que es divisible por 6.

PROBLEMA 60.

Demuestra que n^3+3n^2+2n es divisible por 6, para todo *n* natural.

SOLUCIÓN.

1. La condición se cumple para $n=1$, dado que $1+3+2=6$.
2. Supongamos que la condición se cumple para un natural arbitrario *n*=*k*. Es decir, n^3+3n^2+2n es divisible por 6. (Es decir, $k^3+3k^2+2k=6p$)

Veremos que la condición se cumple para $n=k+1$.

En el problema 59 hemos probado que $(k+1)(3k+6)$ es divisible por 6, es decir, $(k+1)(3k+6)=6q$

$$\begin{aligned}
&\left(k+1\right)^3+3\left(k+1\right)^2+2\left(k+1\right) \\
&=k^3+3k^2+3k+1+3k^2+6k+3+2k+2 \\
&=\left(k^3+3k^2+2k\right)+\left(k+1\right)\left(3k+6\right) \\
&=6p+6q \\
&=6(p+q)
\end{aligned}$$

PROBLEMA 61.

Demuestra que $7^{2n+1}-48^n-7$ es divisible por 48, con *n* natural.

SOLUCIÓN.

1. La condición se cumple para $n=1$, dado que: $7^3-48-7=288=6*48$.

2. Supongamos que la condición se cumple para $n=k$, es decir:

$$7^{2k+1}-48^{k}-7=48p$$

Veremos que la condición se cumple para $n=k+1$.

$$7^{2(k+1)+1}-48^{k+1}-7$$
$$=7^{2k+1+2}-48^{k+1}-7$$
$$=7^{2k+1}7^{2}-48^{k}48-7$$
$$=7^{2k+1}7^{2}-48^{k}\left(7^{2}-1\right)-7$$
$$=7^{2}\left(7^{2k+1}-48^{k}\right)+48^{k}-7$$
$$=7^{2}\left(7^{2k+1}-48^{k}\right)+7^{3}-7^{3}+48^{k}-7$$
$$=7^{2}\left(7^{2k+1}-48^{k}-7\right)+7^{3}+48^{k}-7$$
$$=7^{2}48p+7^{3}+48^{k}-7$$
$$=7^{2}48p+7*48+48^{k}$$
$$=48\left(7^{2}p+7+48^{k-1}\right)$$

PROBLEMA 62.

Demuestra que $\left(a+b\right)^{n}=C_{0}^{n}a^{n}+C_{1}^{n}a^{n-1}b+C_{2}^{n}a^{n-2}b^{2}+...+C_{n-1}^{n}ab^{n-1}+C_{n}^{n}b^{n}$, para todo número natural n

SOLUCIÓN.

1. La condición se cumple para $n=1$, dado que: $\left(a+b\right)^{1}=a+b=C_{0}^{1}a+C_{1}^{1}b$.
2. Supongamos que la condición se cumple para $n=k$, es decir:

$$\left(a+b\right)^{k}=C_{0}^{k}a^{k}+C_{1}^{k}a^{k-1}b+C_{2}^{k}a^{k-2}b^{2}+...+C_{k-1}^{k}ab^{k-1}+C_{k}^{k}b^{k}$$

Veremos que la condición se cumple para $n=k+1$.

$$\left(a+b\right)^{k+1}=\left(a+b\right)\left(a+b\right)^{k}$$
$$=\left(a+b\right)\left(C_{0}^{k}a^{k}+C_{1}^{k}a^{k-1}b+C_{2}^{k}a^{k-2}b^{2}+...+C_{k-1}^{k}ab^{k-1}+C_{k}^{k}b^{k}\right)$$
$$=C_{0}^{k}a^{k+1}+C_{1}^{k}a^{k}b+C_{2}^{k}a^{k-1}b^{2}+...+C_{k-1}^{k}a^{2}b^{k-1}+C_{k}^{k}ab^{k}$$
$$+C_{0}^{k}a^{k}b+C_{1}^{k}a^{k-1}b^{2}+C_{2}^{k}a^{k-2}b^{3}+...+C_{k-1}^{k}ab^{k}+C_{k}^{k}b^{k+1}$$
$$=C_{0}^{k}a^{k+1}+\left(C_{1}^{k}+C_{0}^{k}\right)a^{k}b+...+\left(C_{k}^{k}+C_{k-1}^{k}\right)ab^{k}+C_{k}^{k}b^{k+1}$$
$$=C_{0}^{k+1}a^{k+1}+C_{1}^{k+1}a^{k}b+...+C_{k}^{k+1}ab^{k}+C_{k+1}^{k+1}b^{k+1}$$
$$=C_{0}^{k+1}a^{k+1}+C_{1}^{k+1}a^{(k+1)-1}b+...+C_{k}^{k+1}ab^{(k+1)-1}+C_{k+1}^{k+1}b^{k+1}$$

PROBLEMA 63.

Los números armónicos $H_1 = 1, H_1 = 1 + \frac{1}{2}, H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, con n un número natural.

Demuestra que $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$, para todo número natural *n*.

SOLUCIÓN.

1. La condición se cumple para $n=1$, dado que: $H_1 = 1 = (1+1)*1-1$.
2. Supongamos que la condición se cumple para $n=k$, es decir:

$$\sum_{i=1}^{k} H_i = (k+1)H_k - k$$

Veremos que la condición se cumple para $n=k+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} H_i &= \left(\sum_{i=1}^{k} H_i\right) + H_{k+1} \\
&= (k+1)H_k - k + H_{k+1} \\
&= (k+1)H_k + \frac{k+1}{k+1} - \frac{k+1}{k+1} - k + H_{k+1} \\
&= (k+1)\left(H_k + \frac{1}{k+1}\right) + H_{k+1} - \left(k + \frac{k+1}{k+1}\right) \\
&= (k+1)H_{k+1} + H_{k+1} - \frac{k(k+1)+k+1}{k+1} \\
&= H_{k+1}(k+1+1) - \frac{(k+1)+(k+1)}{k+1} \\
&= \left[(k+1)+1\right]H_{k+1} - (k+1)
\end{aligned}$$

PROBLEMA 64.

Conjetura y demuestra la fórmula general a la que se ajustan las igualdades siguientes.

$$1 = 1$$
$$2+3+4 = 1+8$$
$$5+6+7+8+9 = 8+27$$

SOLUCIÓN.

$$1^2 = 1^3$$
$$\left(2^2 - 2*2+2\right) + \left(2^2 - 2*2+3\right) + 2^2 = (2-1)^3 + 2^3$$
$$\left(3^2 - 2*3+2\right) + \left(3^2 - 2*3+3\right) + \left(3^2 - 2*3+4\right) + \left(3^2 - 2*3+5\right) + 3^2 = (3-1)^3 + 3^3$$

De donde proponemos como la fórmula general a la que se ajustan las igualdades a:

$$\left(n^2-2n+2\right)+\left(n^2-2n+3\right)+\left(n^2-2n+4\right)+...+n^2=\left(n-1\right)^3+n^3.$$

Demostración de la fórmula.

1. La fórmula se cumple para $n=1$, dado que: $1^2=(1-1)^3+1^3$.
2. Supongamos que la condición se cumple para $n=k$, es decir:

$$\left(k^2-2k+2\right)+\left(k^2-2k+3\right)+\left(k^2-2k+4\right)+...+k^2=\left(k-1\right)^3+k^3.$$

Veremos que la condición se cumple para $n=k+1$.

$$\left(\left(k+1\right)^2-2\left(k+1\right)+2\right)+\left(\left(k+1\right)^2-2\left(k+1\right)+3\right)+\left(\left(k+1\right)^2-2\left(k+1\right)+4\right)+...+\left(k+1\right)^2$$

$$=\left[\left(k+1\right)^2-2\left(k+1\right)+2\right]+\left[\left(k+1\right)^2-2\left(k+1\right)+3\right]+\left[\left(k+1\right)^2-2\left(k+1\right)+4\right]$$

$$+...+\left[\left(k+1\right)^2-2\right]+\left[\left(k+1\right)^2-1\right]+\left[\left(k+1\right)^2\right]$$

$$=\left[\left(k^2-2k+2\right)+\left(2k-1\right)\right]+\left[\left(k^2-2k+3\right)+\left(2k-1\right)\right]+\left[\left(k^2-2k+4\right)+\left(2k-1\right)\right]$$

$$+...+\left[k^2+\left(2k-1\right)\right]+\left[k^2+2k\right]+\left[k^2+2k+1\right]$$

$$=\left(k^2-2k+2\right)+\left(k^2-2k+3\right)+\left(k^2-2k+4\right)+...+k^2+\left(2k-1\right)\left(2k-1\right)+\left(k^2+2k\right)+\left(k^2+2k+1\right)$$

$$=\left(k-1\right)^3+k^3+\left(2k-1\right)\left(2k-1\right)+\left(k^2+2k\right)+\left(k^2+2k+1\right)$$

$$=k^3+k^3-3k^2+3k-1+4k^2-4k+1+k^2+2k+k^2+2k+1$$

$$=k^3+\left(k^3+3k^2+3k+1\right)$$

$$=k^3+\left(k+1\right)^3$$

$$=\left(\left(k+1\right)-1\right)^3+\left(k+1\right)^3$$

PROBLEMA 65.

Demuestra que $L_n=F_{n-1}+F_{n+1}$, donde L_n son los números de Lucas, dados por $L_0=2, L_1=1, L_n=L_{n-1}+L_{n-2}(n\geq 2)$, y F_n son los números de Fibonacci, dados por $F_0=2, F_1=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geq 2)$

SOLUCIÓN.

1. La fórmula se cumple para $n=1$, dado que: $L_1=1=0+1=F_0+F_2$.
2. Supongamos que la fórmula se cumple para $n=1,2,k-1,k$. Es decir:

$$L_1=F_0+F_1, L_2=F_1+F_3, L_3=F_2+F_4, ...L_{k-1}=F_{k-2}+F_k, L_k=F_{k-1}+F_{k+1}.$$

Veremos que la condición se cumple para $n=k+1$.

$$L_{k+1}=L_{(k+1)-1}+L_{(k+1)-2}=L_k+L_{k-1}=\left(F_{k-1}+F_{k+1}\right)+\left(F_{k-2}+F_k\right)$$

$$=\left(F_{k-1}+F_{k-2}\right)+\left(F_{k+1}+F_k\right)=F_k+F_{k+2}$$

PROBLEMA 66.

Sea $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión dada por:

$$p_1 = 3, p_2 = 7, p_n = 3p_{n-1} - 2p_{n-2}.$$

Demuestra que $p_n = 2^{n+1} - 1$ para todo entero positivo.

SOLUCIÓN.

1. La fórmula se cumple para $n = 1$, dado que: $p_1 = 3 = 2^2 - 1$.
2. Supongamos que la fórmula se cumple para $n = 1, 2, k-1, k$. Es decir:

$$p_1 = 2^{1+1} - 1, p_2 = 2^{2+1} - 1, \ldots, p_{k-1} = 2^{(k-1)+1} - 1, p_k = 2^{k+1} - 1.$$

Veremos que la condición se cumple para $n = k+1$.

$$p_{k+1} = 3p_k - 2p_{k-1} = 3\left(2^{k+1} - 1\right) - 2\left(2^k - 1\right)$$
$$= 3 * 2^{k+1} - 3 - 2 * 2^k + 2 = 2^k\left(3 * 2 - 2\right) - 1$$
$$= 2^k * 4 - 1 = 2^{k+2} - 1$$

PROBLEMA 67.

Sea $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión dada por:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Demuestra que $a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ para todo entero positivo *n*.

SOLUCIÓN.

1. La fórmula se cumple para $n = 1$, dado que: $a_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$.
2. La fórmula se cumple para $n = 2$, dado que: $a_2 = 2 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$.
3. Supongamos que la fórmula se cumple para $n = 1, 2, \ldots, k, k \geq 2$. Es decir:

$$a_1 = 1 < \frac{7}{4}, a_2 = 2 < \left(\frac{7}{4}\right)^2, \ldots, a_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}, a_k < \left(\frac{7}{4}\right)^k.$$

Veremos que la condición se cumple para $n = k+1$.
En efecto:

$$a_{k+1} = a_{(k+1)-1} + a_{(k+1)-2} = a_k + a_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^k + \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^k}{\left(\frac{7}{4}\right)} \;.$$

$$= \left(\frac{7}{4}\right)^k + \frac{4}{7}\left(\frac{7}{4}\right)^k = \left(\frac{7}{4}\right)^k \left(1+\frac{4}{7}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^k \left(\frac{11}{7}\right) < \left(\frac{7}{4}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$$

PROBLEMA 68.

Demuestra que $n = 5x + 7y$ para todo entero positivo $n \geq 24$, siendo x y y dos números naturales.

SOLUCIÓN.

1. La fórmula se cumple para $n = 24$, dado que: $24 = 5*2 + 7*2$.
   La fórmula se cumple para $n = 25$, dado que: $25 = 5*5 + 7*0$.
   La fórmula se cumple para $n = 26$, dado que: $26 = 5*1 + 7*3$.
   La fórmula se cumple para $n = 27$, dado que: $27 = 5*4 + 7*1$.
   La fórmula se cumple para $n = 28$, dado que: $28 = 5*0 + 7*4$.
   La fórmula se cumple para $n = 29$, dado que: $29 = 5*3 + 7*2$.
2. Supongamos que la fórmula se cumple para $n = 1, 2, ..., k, k \geq 29$. Veremos que la condición se cumple para $n = k + 1$.

De acuerdo con la hipótesis de inducción, resulta evidente que para todo $k \geq 29$, la proposición resulta verdadera para $n = k + 1 - 5$.

Por tanto: $k + 1 - 5 = 5a + 7b \Rightarrow k + 1 = 5a + 7b + 5 = 5(a+1) + 7b = 5\alpha + 7\beta$.

PROBLEMA 61.

Demuestra que $7^{2n+1} - 48^n - 7$ es divisible por 48, con *n* natural.

SOLUCIÓN.

1. La condición se cumple para $n = 1$, dado que: $7^3 - 48 - 7 = 288 = 6 * 48$.
2. Supongamos que la condición se cumple para $n = k$, es decir:

$$7^{2k+1} - 48^k - 7 = 48p$$

Veremos que la condición se cumple para $n = k + 1$.

$$7^{2(k+1)+1} - 48^{k+1} - 7$$
$$= 7^{2k+1+2} - 48^{k+1} - 7$$
$$= 7^{2k+1}7^2 - 48^k 48 - 7$$
$$= 7^{2k+1}7^2 - 48^k \left(7^2 - 1\right) - 7$$
$$= 7^2 \left(7^{2k+1} - 48^k\right) + 48^k - 7$$
$$= 7^2 \left(7^{2k+1} - 48^k\right) + 7^3 - 7^3 + 48^k - 7$$
$$= 7^2 \left(7^{2k+1} - 48^k - 7\right) + 7^3 + 48^k - 7$$
$$= 7^2 48p + 7^3 + 48^k - 7$$
$$= 7^2 48p + 7 * 48 + 48^k$$
$$= 48\left(7^2 p + 7 + 48^{k-1}\right)$$

PROBLEMA 62.

Demuestra que $\left(a+b\right)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + ... + C_{n-1}^n a b^{n-1} + C_n^n b^n$, para todo número natural *n*

SOLUCIÓN.

1. La condición se cumple para $n = 1$, dado que: $\left(a+b\right)^1 = a + b = C_0^1 a + C_1^1 b$.
2. Supongamos que la condición se cumple para $n = k$, es decir:

$$\left(a+b\right)^k = C_0^k a^k + C_1^k a^{k-1} b + C_2^k a^{k-2} b^2 + ... + C_{k-1}^k a b^{k-1} + C_k^k b^k$$

Veremos que la condición se cumple para $n = k + 1$.

$$\left(a+b\right)^{k+1}=\left(a+b\right)\left(a+b\right)^{k}$$

$$=\left(a+b\right)\left(C_0^k a^k+C_1^k a^{k-1}b+C_2^k a^{k-2}b^2+...+C_{k-1}^k ab^{k-1}+C_k^k b^k\right)$$

$$=C_0^k a^{k+1}+C_1^k a^k b+C_2^k a^{k-1}b^2+...+C_{k-1}^k a^2 b^{k-1}+C_k^k ab^k$$

$$+C_0^k a^k b+C_1^k a^{k-1}b^2+C_2^k a^{k-2}b^3+...+C_{k-1}^k ab^k+C_k^k b^{k+1}$$

$$=C_0^k a^{k+1}+\left(C_1^k+C_0^k\right)a^k b+...+\left(C_k^k+C_{k-1}^k\right)ab^k+C_k^k b^{k+1}$$

$$=C_0^{k+1}a^{k+1}+C_1^{k+1}a^k b+...+C_k^{k+1}ab^k+C_{k+1}^{k+1}b^{k+1}$$

$$=C_0^{k+1}a^{k+1}+C_1^{k+1}a^{(k+1)-1}b+...+C_k^{k+1}ab^{(k+1)-1}+C_{k+1}^{k+1}b^{k+1}$$