Práctica 2: Límites y continuidad de funciones de una variable

Ejemplo 1. Límites en un punto

La función $f(x) = \frac{3x+1}{3x^2 - x^3}$ se introduce así:

```
> f:=x->(3*x+1)/(3*x^2-x^3);
```

Para hallar y visualizar el límite de la función en $x = 1$ se procede así:

```
> limit(f(x),x=1);
> Limit(f(x),x=1)=limit(f(x),x=1);
> plot(f(x),x=0..2,y=0..5);
```

Para hallar y visualizar el límite de la función en $x = 0$ se procede así:

```
> limit(f(x),x=0);
> Limit(f(x),x=0)=limit(f(x),x=0);
> Limit(f(x),x=0,left)=limit(f(x),x=0,left);
> Limit(f(x),x=0,right)=limit(f(x),x=0,right);
> plot(f(x),x=-1..1,y=0..15);
```

Para hallar y visualizar el límite de la función en $x = 0$ se procede así:

```
> limit(f(x),x=3);
> Limit(f(x),x=3)=limit(f(x),x=3);
> Limit(f(x),x=3,left)=limit(f(x),x=3,left);
> Limit(f(x),x=3,right)=limit(f(x),x=3,right);
> plot(f(x),x=2..4,y=-10..10);
> plot(f(x),x=2..4,y=-10..10,discont=true);
> plot(f(x),x=-2..4,y=-10..10);
```

Otro límite:

```
> g:=x->sin(1/x);
> Limit(g(x),x=0)=limit(g(x),x=0);
> plot(g(x),x=-1..1);
> plot(g(x),x=-0.1..0.1);
> Limit(g(x),x=0,right)=limit(g(x),x=0,right);
> Limit(g(x),x=0,left)=limit(g(x),x=0,left);
```

Y otro más:

```
> h:=x->x*sin(1/x);
> Limit(h(x),x=0)=limit(h(x),x=0);
> plot(h(x),x=-1..1);
> plot(h(x),x=-0.1..0.1);
> plot([h(x),x,-x],x=-0.1..0.1,color=[red,blue,blue]);
```

Numéricamente, se puede intuir el límite mediante la construcción de tablas adecuadas. De las tablas:

```
> tabla_left:=array([[x,'f(x)'],seq([1.-1/10**i,f(1.-1/10**i)],i=1..9)]);
> tabla_right:=array([[x,'f(x)'],seq([1.+1/10**i,f(1.+1/10**i)],i=1..9)]);
```

se puede deducir que el límite de la función $f(x)$ en $x=1$ es $2.$

Ejemplo 2. Límites en el infinito

Para hallar el límite en el infinito de una función:

```
> restart:
> f:=x->x*exp(-x);
> Limit(f(x),x=infinity)=limit(f(x),x=infinity);
> Limit(f(x),x=-infinity)=limit(f(x),x=-infinity);
> plot(f(x),x=-2..5,y=-5..1);
```

Ejemplo 3. Funciones definidas a trozos

Para introducir la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \text{ and } x \leq 2 \\ x-2 & 2 < x \end{cases}$$

se procede así:

```
> f:=x->piecewise(x <= 0, 1-x, 0 < x and x <= 2, 1, 2 < x, x-2);

> plot(f(x),x=-2..4,discont=true);
> Limit(f(x),x=0)=limit(f(x),x=0);
> Limit(f(x),x=2)=limit(f(x),x=2);
> Limit(f(x),x=2,left)=limit(f(x),x=2,left);
> Limit(f(x),x=2,right)=limit(f(x),x=2,right);
>
```

Ejercicio 1

Se considera la función

$$f(x) = \frac{x \cdot \sin(\pi x)}{\sqrt{1-\cos(\pi x)}}$$

a) Halla su límite, o límites laterales, en $x=0.$

b) Halla su límite, o límites laterales, en $x=2.$

c) Comprueba la veracidad de los límites anteriores mediante la construcción de tablas adecuadas.

d) Representa gráficamente la función en el intervalo $[-5, 5]$.

e) ¿Es continua? En caso negativo, ¿qué tipos de discontinuidad presenta?

Ejercicio 2

Se considera la función

$$g(x) = \begin{cases} 2 - x & x < 1 \\ 3 - x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Halla el límite, o límites laterales, en $x = 1$.
b) Representa su gráfica.

Ejercicio 3

Se considera la función: $h(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ definida cuando $x > 0$.
a) Represéntala gráficamente.
b) Mediante la construcción de una tabla adecuada, intuye su límite en $x = 0$.
c) Halla el valor de límite, y comprueba que coincide con los cálculos anteriores.

Ejercicio 4

Se considera la función $f(x) = \dfrac{k - |x - k|}{x}$, $k \in \mathbb{R}$.

a) Haz $k = 1$ y entonces:

- Representa la función obtenida en el intervalo $[-10, 10]$.
- Halla su límite en $x = 0$.¿Qué tipo de discontinuidad presenta?
- Halla sus límites en $+\infty$ y en $-\infty$.

b) Haz lo mismo cuando $k = 0$.
c) Y cuando $k = -1$.