UNIVERSIDAD SALESIANA DE BOLIVIA

PRACTICA No 3

CÁLCULO III

Lic. Samuel Cabero Leniz

1. Calcular el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias dadas. Determine, si es posible, si los puntos terminales del intervalo son o no convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\,x^n$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,2^n}x^n$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n\,n^2}$

j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{2^n}x^n$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n-1}}x^n$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{2^n}x^n$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^3}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+2)}(x-4)^n$

ñ) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$

o) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n!}(x+2)^n$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\,2^n}$

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^n}{n^2\,3^n}$

r) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(x+2)^n}{n^2}$

s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}x^n$

t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\frac{n+2}{n+1}x^n$

u) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)\,3^n}$

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}(x-1)^n$

w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{1/2}\,3^{n-1}}x^n$

x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+6)^n}{n^{1/2}\,(n+1)^{1/2}}$

y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}x^n$

z) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$

2. Encuentre una solución en serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, de la ecuación diferencial dada. Identifique la solución en términos de funciones elementales conocidas si es posible.

   a) $2y' + 3y = 0.$
   b) $y' + 2xy = 0.$
   c) $y' = x^2 y.$
   d) $(2x - 1)y' + 2y = 0.$
   e) $2(x + 1)y' = y.$
   f) $(x - 1)y' + 2y = 0.$
   g) $2(x - 1)y' = 3y.$
   h) $y'' + 9y = 0.$
   i) $y'' + y = x.$
   j) $(x^2 + 2)y'' + 4xy' + 2y = 0.$
   k) $(x^2 - 1)y'' - 6xy' + 12y = 0.$
   l) $(x^2 - 3)y'' + 2xy' = 0.$
   m) $(1 - x^3)y'' + x^4 y = 0.$

3. Determinar la solución en serie de potencias de las ecuaciones diferenciales. Aplique luego las condiciones iniciales dadas para determinar los valores a_0 y a_1.

   a) $y'' + 4y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$
   b) $y'' - 4y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$
   c) $y'' - 2y' + y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
   d) $y'' + y' - 2y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$

4. Determine los puntos singulares de cada ecuación diferencial y clasifique cada punto singular como regular o irregular.

   a) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0.$
   b) $(x^2 - 4)y'' + (x - 2)y' + (x + 2)y = 0.$
   c) $(x^2 - 9)^2 y'' + (x^2 + 9)y' + (x^2 + 4)y = 0.$
   d) $x^3(1 - x)y'' + (3x + 2)y' + xy = 0.$
   e) $(x^2 - 9)^2 y'' + (x + 3)y' + 2y = 0.$
   f) $x^3(x^2 - 25)(x - 2)^2 y'' + 3x(x - 2)y' + 7(x + 5)y = 0.$

5. Determine dos soluciones en serie de *Frobenius* linealmente independientes para cada una de las ecuaciones diferenciales dadas.

   a) $xy'' + 2y' + 9xy = 0.$
   b) $xy'' - y' + 4x^2 y = 0.$

6. Determine dos soluciones en serie de *Frobenius* linealmente independientes (para $x > 0$) para cada una de las ecuaciones diferenciales dadas.

   a) $xy'' + 2y' + 9xy = 0.$
   b) $xy'' - y' + 4x^2 y = 0.$

7. Hallar dos soluciones en serie de potencias de la ecuación diferencial dada la ecuación diferencial dada alrededor del punto ordinario $x = 0$.

   a) $y'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$
   b) $xy'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$
   c) $y'' + e^{-x} y = 0$

d) $y'' + e^x y' - y = 0$

8. Utilice el método de serie de potencias para resolver la ecuación no homogénea.

   a) $y'' - xy = 1$
   b) $y'' - 4xy' - 4y = e^x$

9. Por definición encuentre la *Transformada de Laplace* de cada una de las siguientes funciones.

   a) $f(t) = e^{t+7}$
   b) $f(t) = t\,e^{4t}$
   c) $f(t) = e^{-t}\operatorname{sen} 2t$
   d) $f(t) = e^{-2t-5}$
   e) $f(t) = e^{2t}\cos 3t$
   f) $f(t) = 2t^4$
   g) $f(x) = \begin{cases} e^{2t}, & 0 < t < 3 \\ 1, & 3 < t \end{cases}$
   h) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t \end{cases}$

10. Utilice la tabla de transformadas y la linealidad de la transformada de *Laplace* para determinar las transformadas siguientes.

    a) $\mathscr{L}\left\{5 - e^{2t} + 6t^2\right\}$
    b) $\mathscr{L}\left\{(1 + e^{2t})^2\right\}$
    c) $\mathscr{L}\left\{e^{3t}\operatorname{sen} 6t - t^3 + e^t\right\}$
    d) $\mathscr{L}\left\{\operatorname{sen} 2t\, \cos 2t\right\}$
    e) $\mathscr{L}\left\{e^{-t}\cosh t\right\}$
    f) $\mathscr{L}\left\{e^{-2t}\cos\sqrt{3}t - t^2 e^{-2t}\right\}$

11. Determine la transformada inversa de *Laplace* de la función dada.

   a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{48}{s^5}\right\}$
   b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-2}\right\}$
   c) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-16}\right\}$
   d) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2s+10}\right\}$
   e) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)(s+2)}\right\}$
   f) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$

12. Utilice la transformada de *Laplace* para resolver la ecuación diferencial dada, sujeta a las condiciones iniciales indicadas.

   a) $y''+5y'+4y=0; \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=0$
   b) $y''-4y'+4y=t^3\,e^{2t}; \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0$
   c) $y''-y'=e^t\cos t; \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0$
   d) $y''+2y'+y=0; \qquad y(1)=2, \quad y'(0)=2$
   e) $y''+4y=4t^2-4t+10; \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=3$
   f) $y''+y=t; \qquad y(\pi)=0, \quad y'(\pi)=0$
   g) $y''-y'-2y=-8\cos t-2\,\mathrm{sen}\,t; \qquad y(\pi/2)=1, \quad y'(\pi/2)=0$
   h) $y''-2y'+y=\cos t-\mathrm{sen}\,t; \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=3$
   i) $y''+4y=f(t)$ donde $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1\\ 0, & t\ge 1\end{cases}; \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=-1$
   j) $y''-y=g(t)$ donde $g(t)=\begin{cases}1, & t<3\\ t, & t>3\end{cases}; \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=2$
   k) $y'''+2y''-y'-2y=\mathrm{sen}\,3t; \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0 \quad y''(0)=1$

13. Escriba el sistema dado en forma matricial.

   a) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-3x+4y-9z\\ \frac{dy}{dt}=6x-y\\ \frac{dz}{dt}=10x+4y+3z\end{cases}$

   b) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-y\\ \frac{dy}{dt}=x+2z\\ \frac{dz}{dt}=-x+z\end{cases}$

   c) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-y+z+t-1\\ \frac{dy}{dt}=2x-y-z-3t^2\\ \frac{dz}{dt}=x+y+z+^2-t+2\end{cases}$

   d) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-3x+4y+e^{-t}\mathrm{sen}\,2t\\ \frac{dy}{dt}=5x+9y+4e^{-t}\cos 2t\end{cases}$

14. Escriba el sistema dado sin usar matrices.

   a) $x'=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^t$

b) $x' = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -9 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t}$

c) $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t$

d) $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t + \begin{pmatrix} t-4 \\ 2t+1 \end{pmatrix} e^{4t}$

15. Verifique el vector x es una solución del sistema dado:

a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 4y \end{cases}$; $x = \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 3\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{t}$

b) $x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$; $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} t\, e^{t}$

c) $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} x$; $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$

16. Los vectores dados son soluciones de un sistema $x' = Ax$. Determine si los vectores forman un conjunto fundamental en $(-\infty, \infty)$.

a) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} t$; $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} t$

b) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$; $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4t}$; $x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t}$

17. Demuestre que la solución general de

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es

$$x = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{\sqrt{2}t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-\sqrt{2}t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

18. Demuestre que la solución general de

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es

$$x = C_1 \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

19. En cada uno de los problemas encuentre la solución general del sistema de ecuaciones dado:

   a) $x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x$

   b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}$

   c) $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$

   d) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4z \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2z \\ \frac{dz}{dt} = 4x + 2y + 3z \end{cases}$

20. Resuelva el sistema sujeta a las condiciones iniciales

   a) $x' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x; \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   b) $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} x; \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$