USB

Carrera: Ingeniería de Sistemas

MAT-214 Cálculo II - Gestión I/2009

Ing. M.Sc. Yuddy Ramiro Cruz Mullisaca

Práctica Nro. 4
Aplicaciones de la Derivada

---

1. Calcular la ecuación del plano tangente (Π_T) a la superficie en el punto dado.

   a) $3x^2 + z^2 = 4$ en $P_0(1,1,1)$
   b) $z^2 = x^2 + y^2$ en $P_0(3,1,10)$
   c) $xyz = 1$ en $P_0(1,1,1)$
   d) $z = \cos x \sin y$ en $P_0(0, \frac{\pi}{2}, 0)$

2. Calcular el plano tangente a la gráfica de las funciones en los puntos dados.

   a) $f(x,y) = x\cos x \cos y$, en i) $P_0(0,0)$, ii) $P_1(0,\pi)$
   b) $f(x,y) = e^{xy}$, en i) $P_0(0,0)$, ii) $P_1(0,1)$

3. Argumente (explique) el por que las gráficas de las funciones $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(x,y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ deberian ser tangentes en $(0,0)$.

4. Calcular la razón de cambio de f (es decir $\frac{\partial f}{\partial v}(P_0)$) en la dirección del vector $\overrightarrow{v}$ en el punto P_0 dado.

   a) $f(x,y,z) = x^2 e^{-yz}$, con $\overrightarrow{v} = (1,1,1)$ en $P_0(1,0,0)$.
   b) $f(x,y) = x + 2xy - 3^2$, con $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$ en $P_0(1,2)$.
   c) $f(x,y) = e^x \cos \pi y$, con $\overrightarrow{v} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{j}$ en $P_0(1,0,0)$.
   d) $f(x,y,z) = e^x xy$, con $\overrightarrow{v} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ en $P_0(1,1,1)$.
   e) Pruebe que $2\sqrt{5}$ es la razón de cambio de $f(x,y,z) = z^2 x + y^3$ en $(1,1,2)$ en la dirección $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$

5. Halle un vector normal a cada superficie en el punto dado (si es posible) y la ecuación del plano tangente en ese punto.

   a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, en $(1,-1,1)$
   b) $\cos z = \sin(x+y)$, en $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
   c) $\ln(\frac{x}{y-z} = 0)$, en $(2,5,3)$

6. Determine el sentido de máximo crecimiento de f y la magnitud del mismo a partir del punto P_0.

   a) $f(x,y) = 3x + 2y - 1$, en i) $P_0(1,-1)$ y en ii) $P_0(1,1)$
   b) $f(x,y) = x^3 + y^3$, en i) $P_0(3,-3)$ y en ii) $P_0(-3,3)$
   c) $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2)$, en $(2,-1,2)$

7. Encontrar los puntos críticos de las funciones dadas y determinar cuales son mínimos locales,

b) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y + y^2 + 4$

c) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$ (Considere sólo el punto crítico $(0,0)$)

d) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$ (Considere sólo los puntos críticos $(0,0)$, $(0,\sqrt{\pi})$ y $(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$)

e) $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$

f) Sea $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$. Aquí $D = 0$. ¿ Puede decir si los puntos críticos son mínimos locales, máximos locales o punto silla?

8. Encontrar los puntos críticos de las funciones dadas y determinar cuales son mínimos locales, máximos locales o puntos silla.

   a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$

   b) $f(x,y,z) = ze^{xy}$

   c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 1$

9. Encontrar los extremos de f sujeta a las restricciones dadas $(f|S)$.

   a) $f(x,y,z) = x - y + z$, con $S : x^2 + y^2 + z^2 = 2$

   b) $f(x,y) = x - y$, con $S : x^2 - y^2 = 2$

   c) $f(x,y) = x$, con $S : x^2 + 2y^2 = 3$

   d) $f(x,y) = 3x + 2y$, con $S : 2x^2 + 3y^2 = 3$

   e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, con $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$

10. Encontrar los extremos de f sujeta a las restricciones dadas $(f|S)$.

    a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$, con $S = \{(x, \cos x) : x \in \mathbb{R}\}$

    b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$, con $S = \{(x, 2) : x \in \mathbb{R}\}$

    c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$, con $S = \{(x,y) : x \geq 2\}$

    d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que $(x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$, con $S = \{(x,y,z) : z \geq 2 + x^2 + y^2\}$

11. Halle el mínimo de $f(x,y,z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2$ sujeta la restricción $4x - 8y + 2z = 10$. ¿Que puede decir sobre el mayor valor de f sujeta a esta restricción?.

12. Halle el máximo de $f(x,y,z) = xy + xz$ sujeta a las restricciones $2x + 3y = 5$ e $xy = 4$.

13. Halle el mínimo de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las restricciones $x + y = 4$ e $y + z = 6$.

14. Resuelva los siguientes problemas.

    a) Desarrollar el número positivo a en tres sumandos positivos de modo que el producto de estos tenga el valor máximo.

    b) Una empresa debe deseñar un tanque de almacenamiento para gas de petróleo líquido. Según las espesificaciones del cliente, se requiere un tanque cilíndrico con extemos semi-esfericos con capacidad de $8000cm^3$ de gas. El cliente requiere tambien que se use la menor cantidad posible de material para la construcción del tanque. ¿Que altura y que radio recomendaria para la porción cilindrica del tanque?.

    c) Encuentre el radio y la altura del cilindro circular recto abierto de mayor área de superficie que puede inscribirse en una esfera de radio a.¿Que valor tiene la mayor área de la superficie?

    d) Una caja ractangular sin tapa deberá tener un área de superficie de $16m^2$. Encontrar las dimensiones que maximicen su volúmen.

    e) La temperatura en un punto (x,y) sobre una placa metálica es:

    $$T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$$

    Una hormiga camina sobre la placa alrrededor del circulo de radio 5 con centro en el origen. ¿Cual son las temperaturas máxima, mínima que encuentra la hormiga ?

    f) De un pedazo de ojalata dado de área $2a$ se necesita hacer un caja cerrada en forma de paralelepipedo que tenga el volumen máximo.