Universidad Salesiana de Bolivia
Carrera: Ingeniería de Sistemas
MAT-214 : Cálculo II - Gestión I/2009

Ing. M.Sc. Yuddy Ramiro Cruz Mullisaca

Práctica Nro. 3
Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

---

1. Determine el dominio de a función:

   a) $f(x,y) = \sqrt{9-2(x^2+y^2)}$. b) $f(x,y) = (\sqrt{xy}, x+y, e^x)$.

   c) $f(x,y,z) = \frac{1}{\ln(x^2+y^2)}$. d) $f(x) = (\sqrt{x}, e^x, \sin x)$.

2. Sean $f(x,y) = (1/x+y, 1/x-y)$ y $g(x,y) = (x+y, y^2)$. Calcular $(f-g)(1,2)$; $(f+g)(3,4)$; $(f\circ 3g)(1,2)$; $(g\circ f)(0,1)$.

3. Sean $f(x,y) = ((x-y)^2, e^x)$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.Calcular :

   a) $(2f+A)(1,0)$. b) $(f-3A)(1,2)$.

   c) $(A\circ f)(1,1)$. d) $(f\circ A^2)(0,1)$.

4. Dadas las funciones f y g, halle las funciones compuestas $g\circ f$ y $f\circ g$ si es posible.

   a) $f(x,y) = (x-y, x+y)$; $g(x,y) = (2x-1, x-2y)$.
   b) $f(x) = (x, x^2, x^3)$; $g(x,y,z) = (x+y, 2z)$.
   c) $f(x,y,z) = xyz$; $g(x) = (e^x, x)$.

5. Calcular los siguientes límites:

   $$a)\ \lim_{(x,y)\to(0,1)} x^3y \qquad b)\ \lim_{(x,y)\to(0,1)} e^xy \qquad c)\ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+3y^2}{x+1}$$

6. Determinar si la función dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & , \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua en $(0,0)$.

7. Determinar si las siguientes funciones son continuas en $(0,0)$.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \sin \frac{x}{y} & , \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ b) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2} & , \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

8. Sea dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & , \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostrar que las aproximaciones

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) \quad \text{y} \quad \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y)$$

son iguales, pero sin embargo f no es continua en el origen.

9. Aplique teoremas sobre continuidad y funciones continuas conocidas y pruebe que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f(x,y) = ye^x + \sin x + (xy)^4$ es continua.

10. Aplique la definición para calcular la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x^2, 3x, x)$ b) $f(x,y) = x^2 - y^2$
c) $f(x,y,z) = 2xy + z$, evaluada en $(1,2,1)$ d) $f(x,y) = (x^2 - y, x + y, x - y)$

11. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $f(x) = ax$, con $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que $Df(x) = aI$, donde I es la matriz identidad de $n \times n$.

12. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ si :

a) $f(x,y) = xy$ b) $f(x,y) = e^{xy}$
c) $f(x,y) = x \cos x \cos y$ d) $f(x,y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

13. Demostrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ para las funciones:

a) $z = 2x^2 - 3xy + y^2$ b) $z = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$ c) $z = x^2y^2 \sin(x^2y^2)$

14. Evaluar las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial y}$ para las funciones dadas en los puntos indicados.

a) $z = \sqrt{a2 - x2 - y2}$; en $(0,0)$ y $(a/2, a/2)$.

b) $z = \ln \sqrt{1 + xy}$; en $(0,0)$ y $(1,2)$.

c) $z = e^{ax} \cos(bx + y)$; en $(2\pi/b, 0)$.

15. Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, si

a) $f(x,y) = x^3 - xy^2 + y^4$ b) $f(x,y) = (x - y)\sin(3x + 2y)$

16. Calcular la derivada de las siguientes funciones utilizando la matriz jacobiana.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $f(x,y) = (x,y)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $f(x,y) = (xe^y + \cos y, x, xe^y)$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $f(x,y,z) = (x + e^z + y, yx^2)$

17. Calcular la derivada de las siguientes funciones utilizando la matriz jacobiana.

a) $f(x,y) = (x^2 - y^2)^2$ b) $f(x,y) = (x + y, x - y)$

c) $f(x,y,z) = (x, z, y - x)$ d) $f(t) = (t, \cos t, \sin t)$

18. Sea dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ,\text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostrar que

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existen.

b) f no es diferenciable en $(0,0)$.

19. Escribir la regla de la cadena para cada una de las siguientes funciones.

a) $\frac{\partial h}{\partial x}$, donde $h(x,y) = f(x, u(x,y))$

b) $\frac{\partial h}{\partial x}$, donde $h(x) = f(x, u(x), v(x))$

c) $\frac{\partial h}{\partial x}$, donde $h(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y), w(x))$

20. Sea la función $f(u,v,w) = u^2 + v^2 - w$, donde $u(x,y,z) = x^2y$, $v(x,y,z) = y^2$, $w(x,y,z) = e^{-xy}$. Halle $f'(u,v,w)$ utilizando la regla de la cadena y verifique su resultado utilizando el método directo.

21. Utilizando la regla de la cadena calcule $\frac{\partial h}{\partial x}$, donde $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$, con $f(u,v) = \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}$, $u(x,y) = e^{-x-y}$ y $v(x,y) = e^{xy}$.

22. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $w = f(x,y,z)$. Realice la sustitución (de coordenadas esféricas) $x = r\cos\theta \sin\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\varphi$,en f para calcular $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$.

23. Si $z = x^2 - y^2 + xy + 2, \quad x = t^2 - 1$ y $y = 1 - t^2$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial t}$:

   a) Directamente.

   b) Aplicando la regla de la cadena.

24. Dada $f(x, y) = (x^2 + 1, y^2)$ y $g(u, v) = (u + v, u, v^2)$. Calcular la derivada de $g \circ f$ en $(1, 1)$ usando la regla de la cadena.

25. Derivar implicitamente para encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$ de $e^{xyz} + 3z = 0$.

26. Derivar implicitamente para encontrar $\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}$ de

$$\begin{cases} 5x^2 + 2uy + 8y & = & 3 \\ xy + 7e^u & = & 2 \end{cases}$$

27. Derivar implicitamente para encontrar $\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}$ de

$$\begin{cases} x^2 + 2uv + 5y & = & 10 \\ xy + u + v & = & 5 \end{cases}$$

28. Calcular la diferencial de las siguientes funciones.

a) $z = \ln(3x^2 - y + 2)$	b) $z = e^x \sin y$
c) $z = x^y$	d) $w = \sin x \cos 2y \sin 3x$

29. Determinar dV donde $V = \pi r^2 h/3$ es el volumen de un cono de radio r y altura h.

Nota.- Los ejercicios de numeración par son los que se deben presentar. Los ejercicios de numeración impar lo resuelve el auxiliar de la materia.