Universidad Salesiana de Bolivia
Carrera: Ingeniería de Sistemas
MAT-214 : Cálculo II - Gestión I/2009

Ing. M.Sc. Yuddy Ramiro Cruz Mullisaca

Práctica Nro. 2
Geometría Analítica Sólida

---

1. Geometría Analítica Sólida

1.1. La Recta.

1. Hallar la ecuación vectorial y cartesiana de la recta que pasa por el punto P_0 con vector direccional $\overrightarrow{v}$.

   a) $P_0(7,5,-2)$; $\overrightarrow{v}=(1,-3,3)$. b) $P_0(-1,3,7)$; $\overrightarrow{v}=(-3,5,1)$.
   c) $P_0(0,2,-1)$; $\overrightarrow{v}=(5,2,1)$. d) $P_0(1,1,2)$; $\overrightarrow{v}=(1,1,1)$.

2. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los pares de puntos dados y proporcionar sus ecuaciones paramétricas.

   a) $(7,5,-2)$ y $(1,-3,3)$. b) $(-1,3,7)$ y $(-3,5,1)$.

3. Son colineales los puntos dados (es decir que si están sobre una misma linea recta).

   a) $(2,-3,2)$, $(0,0,0)$,$(3,-2,0)$. b) $(1,2,0)$, $(5,-7,8)$,$(4,3,-1)$.

4. Calcular la distancia del punto P_0 a la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2.

   a) $P_0(5,-3,1)$; $P_1(4,0,2)$; $P_2(5,0,0)$
   b) $P_0(1,0,10)$; $P_1(3,5,3)$; $P_2(3,5,7)$
   c) $P_0(-2,-7,-3)$; $P_1(-4,2,1)$; $P_2(3,-1,8)$

5. Hallar la distancia del punto $P(-1,3,-1)$ a la recta $L:\ \overrightarrow{X}=(-2,7,4)+t(6,-1,3)$.

6. Calcular la distancia entre las siguientes rectas.

   a) $\overrightarrow{X}=(1,7,3)+t(6,-1,3)$ y $\overrightarrow{X}=(1,2,-3)+t(4,3,1)$
   b) $\overrightarrow{X}=(-1,-2,-3)+t(5,5,1)$ y $\overrightarrow{X}=(-5,-5,1)+t(1,2,3)$

c) $x = t; y = 2t; z = 3t$ y $x = 1 - t; y = 2 + 2t; z = 1 - 3t$

d) $x = 2t; y = -t; z = 1 + 3t$ y $x = 2t; y = 1 - 2t; z = 2 + 6t$

7. Hallar los ángulos que forma la recta $x = t, y = 2t, z = t$ con los ejes coordenados.

8. Hallar la ecuación paramétrica de la recta que pas por $(-1, 2, 4)$y que es paralela a $\overrightarrow{b} = 3i - 4j + k$.

9. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por $(3, -2, 5)$y que es paralela a la recta $x = 1 + 2t, y = 4 - t, z = 6 + 2t$.

10. Determine las ecuaciónes paramétricas de la recta que pasa por $(3, -7, 4)$ y que es paralela a:

    a) al eje OX. b)al eje OY. c)al eje OZ.

11. Halle el punto donde la recta $x = -1 + 2t, y = 3 + t, z = 6 - 2t$ interseca:

    a) al plano OXY. b) al plano OXZ. c) al plano OYZ.

12. Hallar las ecuaciónes paramétricas de la recta que pasa por (x_1, y_1, z_1)y que es paralela a la recta $x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct$.

13. Demostrar que si a, b, c son diferentes de cero, entonces todos los puntos de la recta $x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct$ satisfacen la ecuación

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

    y reciprocamente, cualquier punto (x, y, z) que satisface etas ecuaciones esta sobre la recta. **Nota**.- Recuerde que estas ecuaciones son llamadas *ecuaciones simétricas de la recta*.

14. Calcular las ecuaciones simétricas y paramétricas de la recta que:

    a) Pasa por $P(1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano OXY.

    b) Pasa por el origen y es perpendicular al plano $\Pi : 2x - y + 3z = 4$

    c) Pasa por $P(2, -1, 5)$ y es paralela a la recta con ecuacione paramétricas $x = 3t, y = 2 + t, z = 2 - t$.

15. Mostrar que las rectas se intersecan y además calcule el punto de interseccion.

    a) $L_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2 + t \\ y & = & 2 + 3t \\ z & = & 3 + t \end{array} \right.$ y $L_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2 - t \\ y & = & 3 + 4t \\ z & = & 4 + 2t \end{array} \right.$

    b) $L_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x + 1 & = & 4t \\ y - 3 & = & t \\ z - 1 & = & 0 \end{array} \right.$ y $L_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x + 13 & = & 12t \\ y - 1 & = & 6t \\ z - 2 & = & 3t \end{array} \right.$

16. Encontrer los números k_1, k_2 para que el punto $(k_1, 1, k_2)$ este sobre la recta que pasa por $(0,2,3)$ y $(2,7,5)$.

17. Determinar si las rectas dadas son paralelas. Justifique su respuesta.

    a) $L_1 : \begin{cases} x &= 3-2t \\ y &= 4+t \\ z &= 6-t \end{cases}$ y $L_2 : \begin{cases} x &= 5-4t \\ y &= -2+2t \\ z &= -1+9t \end{cases}$

    b) $L_1 : \begin{cases} x &= 5+3t \\ y &= 4-2t \\ z &= -2+3t \end{cases}$ y $L_2 : \begin{cases} x &= -1+9t \\ y &= 5-6t \\ z &= 3+8t \end{cases}$

1.2. El Plano

1. Hallar las ecuaciones vectorial y paramétrica del plano que pasa por los puntos dados.

    a) $(-2,1,1), (0,2,3)$ y $(1,0,-1)$

    b) $(3,2,1), (-5,3,-1)$ y $(-3,2,7)$

2. Determine si los planos dados son paralelos. Justifque su respuesta.

    a) $\Pi_1 : 3x - 2y + z = 4\ ; \Pi_2 : 6x - 4y + 3z = 7$

    b) $\Pi_1 : 2x - 8y - 6z - 2 = 0\ ; \Pi_2 : -x + 4y + 3z - 5 = 0$

    c) $\Pi_1 : y = 4x - 2z + 3\ ; \Pi_2 : x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z$

3. Determinar el ángulo entre los planos $\Pi_1 : 9x + 12y + 3z = -2$ y $\Pi_2 : 12x + 16y + 4z = 9$.

4. Mostrar que los planos $\Pi_1 : \overrightarrow{x} = (4,2,0) + s(3,7,1) + t(0,8,-3)$ y $\Pi_2 : \overrightarrow{x} = (3,2,3) + u(3,-1,4) + v(9,5,9)$ son paralelos. Encontrar la distancia entre ambos planos.

5. Determinar si la recta y el plano son paralelos.

    a) $L : \begin{cases} x &= 4+2t \\ y &= -t \\ z &= -1-4t \end{cases}$ y $\Pi : 3x + 2y + z = 7$

    b) $L : \begin{cases} x &= t \\ y &= 2t \\ z &= 3t \end{cases}$ y $\Pi : x - y + 2z = 5$

    c) $L : \begin{cases} x &= -1-3t \\ y &= 2+t \\ z &= -1-4t \end{cases}$ y $\Pi : 5x - y - 2z = 3$

6. Determinar si los planos son perpendiculares entre si.

    a) $\Pi_1 : x - y + 3z = 2\ ; \Pi_2 : 2x + z = 1$

b) $\Pi_1 : 3x - 2y + z = 1\,; \Pi_2 : 4x + 5y - 2z = 4$

c) $\Pi_1 : y = 4x - 2z + 3\,; \Pi_2 : x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z$

7. Hallar el punto de intersección de la recta y el plano.

   a) $L : \begin{cases} x &= -1 + 2t \\ y &= 3 - t \\ z &= 5 - 3t \end{cases}$ y $\Pi : 3x + 2y + z = 7$

   b) $L : \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= -1 + 2t \\ z &= 5 - 4t \end{cases}$ y $\Pi : x - y + 2z = 5$

   c) $L : \begin{cases} x &= -1 - 3t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 - 4t \end{cases}$ y $\Pi : 5x - y - 2z = 3$

8. Encontrar el ángulo agudo de intersección de los planos (Con aproximación en grados)

   a) $\Pi_1 : x = 0\,; \Pi_2 : 2x - y + z = 4$

   b) $\Pi_1 : x + 2y - 2z = 5\,; \Pi_2 : 6x - 3y + 2z = 8$

   c) $\Pi_1 : y = 4x - 2z + 3\,; \Pi_2 : x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z$

9. Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(-1, 4 - 3)$ y es perpendicular a la recta $x = -1 + 2t, y = 3 - t, z = 5 - 3t$.

10. Encontrar la distancia del punto $P(2, -2, 4)$ al plano que contiene a los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$ y $C(0, 5, 0)$.

11. Determine una ecuación del plano que pasa por $(1, 1, 1)$ y que interseca al plano OXY en la misma recta que lo hace el plano $6x - 3y + 2z = 8$.

12. Encontrar la ecuación del plano que pasa por el origen y que es paralelo al plano $x+2y-2z = 5$.

13. Encontrar la ecuación del plano que contiene a la recta $x = 1 + t, y = -1 + 2t, z = 5 - 4t$ y es perpendicular al plano $2x - y + z = 4$.

14. Encontrar la ecuación del plano que pase por $(-1, 4, 2)$ y que contiene a la recta de intersección de los planos $\Pi_1 : 3x - 2y + z = 1$ y $\Pi_2 : 4x + 5y - 2z = 4$.

15. Demuestre que las rectas $L_1 : x - 1 = \frac{y+1}{2} = z$ y $L_2 : x - 2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{2}$ se intersecan. Además determine la ecuación del (único) plano que las contiene.

16. Demuestre que la recta de intersección de los planos $\Pi_1 : x+2y-z = 2$ y $\Pi_2 : 3x+2y+2z = 7$ es paralela a la recta $x = 1 + 6t, y = 3 - 5t, z = 2 - 4t$. Además halle una ecuación del plano determinado por estas dos rectas.

17. Muestre que la distancia D del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $\Pi : ax + by + cz = d$ es:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1.3. La distancia entre Puntos,Planos y Rectas.

1. Muestre que la distancia D del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $\Pi : ax + by + cz = d$ es:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

2. Encontrar la distancia del punto $P(2, -2, 4)$ al plano que contiene a los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$ y $C(0, 5, 0)$.

3. Demostrar que la distancia D entre los planos paralelos $\Pi_1 : ax + by + cz - d = d_1$ y $\Pi_2 : ax + by + cz - d = d_2$ esta dada por:

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

4. Mostrar que la distancia D del punto P_1 a la recta $L : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{P}_0 + t\overrightarrow{v}$ está dado por:

$$D = \|(P_1 - P_0) - \frac{(P_1 - P_0) \circ \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\overrightarrow{v}\|$$

5. Demostrar que la recta $L : x = -1 + t, y = 3 + 2t, z = -t$ y el plano $\Pi : 2x + -2y - 2z + 3 = 0$ son paralelos. Además hallar la distancia entre ellos.

1.4. Ejercicios adicionales

1. Demostrar que los puntos $(1, 0, -1), (-2, 1, 1), (0, 2, 3)$ y $(4, 2, 3)$están en el mismo plano.

2. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(5, 0, -2)$ y que es paralela a los planos $\Pi_1 : x - 4y + 2z = 0$ y $\Pi_2 : 2x + 3y - z + 1 = 0$.

3. Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(-1, 2, -5)$ y es perpendicular a los planos $\Pi_1 : 2x - y + z = 2$ y $\Pi_2 : x + y - 2z = 3$.

4. Encontrar la ecuación de un plano que pase por los puntos $P_1(-2, 1, 4)$ y $P_2(1, 0, 3)$ y que sea perpendicular al plano $\Pi : 4x - y + 3z = 2$.

5. Encontrar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de $P_1(-2, 1, 4)$ y $P_2(1, 0, 3)$.

6. Determine la ecuación del plano que pasa por la intersección de los planos $\Pi_1 : x + y + z = 6$ y $\Pi_2 : y + 3z = 5$ y es perpendicular al plano $\Pi : x - 2y + 3z = 12$.