Universidad Salesiana de Bolivia
Carrera: Ingeniería de Sistemas
MAT-214 : Cálculo II - Gestión I/2009

Ing. M.Sc. Yuddy Ramiro Cruz Mullisaca

Práctica Nro. 1
Vectores

---

1. Vectores

1.1. Propiedades y Operaciones.

Sean $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^2$, tales que $\overrightarrow{x} = (5, -2, 6)$, $\overrightarrow{y} = (5, -7, 3)$ y $\overrightarrow{z} = (9, -5, 1)$. Halle:

1. $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$.
2. $\overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{y} - 5\overrightarrow{z}$.
3. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) + \frac{1}{4}z$.
4. Si $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^3$, tales que $\overrightarrow{x} = (3, -2, 4)$, $\overrightarrow{y} = (5, 3, -1)$ y $\overrightarrow{z} = (4, 1, 0)$, entonces calcule los incisos 1), 2) y 3) con estos vectores.
5. Si $\overrightarrow{a} = (3, 1, -2)$, $\overrightarrow{b} = (-7, -5, 3)$. Entonces calcule $\overrightarrow{x}$ tal que $3\overrightarrow{x} - 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = 0$
6. Si $\overrightarrow{a} = (6, -2, 5)$, $\overrightarrow{b} = (8, -3, 7)$. Entonces calcule $\overrightarrow{x}$ tal que $2(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - 2\overrightarrow{b} - 2(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})$
7. Calcular la distancia entre los siguientes puntos:
   a) $(3, 1, 5)$ y $(7, -2, 7)$. b) $(2, 3, 5)$ y $(-3, 7, 2)$. c) $(3, 5, -4)$ y $(3, -5, 9)$.
8. Sean $\overrightarrow{u} = 2i - j + 4k$ y $\overrightarrow{v} = 4i + 2j - 3k$. Encontrar los números c_1 y c_2 tales que $c_1\overrightarrow{u} + c_2\overrightarrow{v} = -4j$.
9. Demuestre gráficamente que hay números reales r, s que satisfacen $\overrightarrow{c} = r\overrightarrow{a} + s\,\overrightarrow{b}$.
   a) $\overrightarrow{a} = (1, 5)$, $\overrightarrow{b} = (5, 3)$, $\overrightarrow{c} = (5, 5)$. b) $\overrightarrow{a} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{b} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{c} = (2, 4, 2)$.

10. Muestre si los siguientes pares de vectores están en la misma dirección o no. Además muestre si son paralelos o no.

    a) $(1,1)$ y $(2,2)$. b) $(3,8)$ y $(8,24)$. c) $(1,2,1,-1)$ y $(3,6,3,3)$.
    d) $(1,-2,2,-1)$ y $(-2,4,-4,2)$. e) $(8,7,2)$ y $(-15,-21,-6)$. f) $(3,9)$ y $(-4,-6)$.

1.2. Norma de un Vector. Producto Escalar.

1. Determine si los siguientes pares de vectores son ortogonales.

    a) $(-1,3,-3)$ y $(3,3,2)$. b) $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$.
    c) $(2,8,4)$ y $(3,-6,1)$. d) $(3,2,-1)$ y $(1,-1,0)$.

2. Hallar un vector que sea ortogonal tanto a $\overrightarrow{u}$ como a $\overrightarrow{v}$.
    a) $\overrightarrow{u} = -7i + 3j + k$, $\overrightarrow{v} = 2i + 4k$
    b) $\overrightarrow{u} = (-1,-1,-1)$, $\overrightarrow{v} = (2,0,2)$.

3. Sean los vectores $\overrightarrow{x} = i - 3j + 2k$, $\overrightarrow{y} = i + j$ y $\overrightarrow{z} = 3i + 2j - 4k$. Calcular:

    a) $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|$. b) $\|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$. c)$\|-2\overrightarrow{x}\| + 2\|\overrightarrow{y}\|$.

    d) $\|3\overrightarrow{x} - 5\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}\|$. e) $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}/\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|$. f) $\|\frac{1}{\|\overrightarrow{z}\|}\overrightarrow{z}\|$.

4. Sean $\overrightarrow{a} = t\,i + j$ y $\overrightarrow{b} = 4i + 3j$. Calcular el valor de t para que:
    a) $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ sean ortogonales.
    b) El ángulo entre $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ sea $\frac{\pi}{4}$.
    c) El ángulo entre $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ sea $\frac{\pi}{6}$.
    d) $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ sean paralelos.

5. Los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ forman un ángulo de $60°$ con $\|\overrightarrow{a}\| = 5$, $\|\overrightarrow{b}\| = 8$. Determinar $\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|$ y $\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|$.

6. Los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ forman un ángulo de $30°$ con $\|\overrightarrow{a}\| = 1$, $\|\overrightarrow{b}\| = \sqrt{3}$. Calcular el ángulo formado entre los vectores $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

7. Dados los vectores $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ que satisfacen la condición $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ y sabiendo que $\|\overrightarrow{a}\| = 3$, $\|\overrightarrow{b}\| = 1$, $\|\overrightarrow{c}\| = 4$. Calcular $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \circ \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{c}$.

8. Sean $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|^2 - \|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|^2 = 4\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}$.

9. Demuestre que $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ son ortogonales si y solo si $\|\overrightarrow{a}\| = \|\overrightarrow{b}\|$. ¿Cual es la interpretación geométrica del problema?.

10. Demuestre que:
    a) $\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|^2 = \|\overline{a}\|^2 + 2\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} + \|\overrightarrow{b}\|^2$.
    b) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \circ (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = \|\overrightarrow{a}\|^2 - \|\overrightarrow{b}\|^2$.

11. Demostrar que:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2.$$

12. Demostrar que:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = \frac{1}{4}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\vec{u} - \vec{v}\|^2.$$

13. Explicar por qué las espresiones siguientes no tienen sentido.

    a) $\vec{a} \circ (\vec{b} \circ \vec{c}) = (\vec{a} \circ \vec{b}) \circ \vec{c}$.   b) $(\vec{a} \circ \vec{b}) + \vec{c}$.

    c) $\|\vec{a} \circ \vec{b}\|$.   e) $k \circ (\vec{a} + \vec{b})$.

14. Determinar los ángulos del triangulo cuyos vértices son $(2, -1, 1)$, $(1, -3, 5)$ y $(3, -4, -4)$.

1.3. Producto Vectorial y sus propiedades.

1. Sean $\vec{u} = (5, -3, 1)$, $\vec{v} = (2, 4, 7)$ y $\vec{w} = (1, 3, 6)$. Calcular:

    a) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.   b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.   c) $\vec{u} \times (\vec{v} - 2\vec{w})$.

    d) $(\vec{u} \times \vec{v}) - 2\vec{w}$.   e) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{w})$.   f) $(\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{u} \times \vec{v})$.

2. Para los vectores $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ demuestre que:

    a) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
    b) $\vec{a} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$
    c) $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \circ (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \circ (\vec{a} \times \vec{b})$
    d) $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \circ (\vec{a} \times \vec{c})$
    e) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$

3. Suponga que $\vec{u} \circ (\vec{v} \times \vec{w}) = 5$.Calcular:

    a) $\vec{u} \circ (\vec{w} \times \vec{v})$
    b) $\vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v})$
    c) $(\vec{u} \times \vec{w}) \circ \vec{v}$
    d) $(\vec{v} \times \vec{w}) \circ \vec{u}$

4. Encontrar el área del triángulo que tiene vértices P, Q y R.

    a) $P(1, 3, 5)$, $Q(3, 2, 1)$, $R(7, 5, 3)$

b) $P(2,0,-5)$, $Q(9,5,1)$, $R(8,4,3)$

5. Encontrar el volumen del paralelepipedo de lados $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$.

   a) $\overrightarrow{a} = (3,5,7)$, $\overrightarrow{b} = (0,4,3)$, $\overrightarrow{c} = (3,-3,5)$.

   b) $\overrightarrow{a} = 3i - 2j + k$, $\overrightarrow{b} = 5i + 7j + 3k$, $\overrightarrow{c} = i + 6j + 4k$.

6. Determinar si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ estan en el mismo plano.

   a) $\overrightarrow{u} = (3,5,7)$, $\overrightarrow{v} = (0,4,3)$, $\overrightarrow{w} = (3,-3,5)$.

   b) $\overrightarrow{u} = (1,-2,1)$, $\overrightarrow{v} = (3,0,-2)$, $\overrightarrow{w} = (5,-4,0)$.

   c) $\overrightarrow{u} = 5i - 2j + k$, $\overrightarrow{v} = 4i - j + k$, $\overrightarrow{c} = i - j$.

   d) $\overrightarrow{u} = (4,-8,1)$, $\overrightarrow{v} = (2,1,-2)$, $\overrightarrow{w} = (3,-4,12)$.

7. Calcular el vector $\overrightarrow{Proy}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{Proy}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$ y además la componente de $\overrightarrow{a}$ sobre $\overrightarrow{b}$ $(Comp_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a})$.

   a) $\overrightarrow{a} = (5,3)$; $\overrightarrow{b} = (1,7)$. b) $\overrightarrow{a} = (3,2,5)$; $\overrightarrow{b} = (-1,3.-7)$. c) $\overrightarrow{a} = (2,1,-3)$; $\overrightarrow{b} = (-1,7,2)$.

   Nota.- Recuerde que el vector $\overrightarrow{Proy}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{b}$, donde $k = Comp_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{b}\|^2}$

1.4. Problemas de Aplicación

1. ¿Que condiciones sobre $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ nos aseguran que $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ son los lados de un triángulo?

2. Pruebe que las diagonales de un rombo son ortogonales entre si.

3. Pruebe que la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados del paralelogramo.

4. Hay cinco estudiantes en grupo (G.A.C.). Sus calificaciones a mitad del curso (sobre 100 pts.) está dado por el vector $(73,80,91,65,84)$ y el final por $(82,79,88,71,92)$. Si la calificación final vale el doble que la de mitad de curso, encuentre un vector que indique las calificaciones totales de los estudiantes (como porcentajes).

5. Un gato está en el suelo en el punto $(1,4,0)$ observando un ardilla que se encuentra en lo alto de un árbol. El árbol mide una unidad de alto y su base esta en el punto (2, 4,0). Encuentre los vectores de deplzamiento:

   a) del origen al gato. b) de la base del árbol a la ardilla.
   c) de la base del árbol a la gato. d) del gato a la ardilla.

6. Un hombre desea remar la distancia más corta posible d norte a sur para cruzar un río cuyas aguas corren a 4km/h desde el este. Si el hombre rema a 5Km/h, entonces:

   a) ¿En que dirección debe remar?

   b) Si sopla un viento de 10Km/h de sudoeste.¿En que dirección debe remar para tratar de ir directamente a la orilla?. Explique en palabras que sucede en este caso.