Teoría General de Sistemas
Ludving Von Bertanllaffy (1963-69)

¿Qué es el sistema generalizado? Concebir el universo como un sistema el cual tiene propiedades y principios generales.

$$\underbrace{\text{(Universo = sistema)} \Rightarrow \text{Principio, Propiedades}}_{\text{Enfoque sistémico}}$$

Evoluciona en el tiempo desde diversos paradigmas. } **Historia**

a) **Paradigma Globalista.-** Surge con el hombre primitivo donde el hombre intenta explicar los caprichos naturales bajo la influencia de divinidades, también se lo llama paradigma teológico.
b) **Paradigma Cartesiano.-** (Rene Descartes) "Discurso del método" obra donde se explica como funcionan las maquina desde el principio de la mecánica racional.

(Sistema) Maquinas: 4 principio fundamentales.

- Principio de Evidencia: El sistema debe ser palpable o con evidencia física.
- Principio estructural: Todo mecanismo tiene estructura física.
- Principio de la exhaustividad: Se tiene que describir cada uno de los componentes del sistema.
- Principio Funcional: Todo debe tener una función específica.

Todo esto involucra a una: Estructura + Función

c) **Paradigma Genético (1930)**: se afirma que los sistemas cambian, el principio del cambio y evolución en el tiempo.
   - Paradigma de la evolución de los sistemas

   Sistema= Estructura +Funciona + Evolución
d) **Paradigma Cibernético (1950):** Se busca la funcionalidad del sistema que tiene un efecto y fin en el entorno.
e) **Paradigma o enfoque sistémico (1960):** Es la combinación del paradigma genético y cibernético en donde un sistema = Estructura + Funciona + Genética + Entorno.

En consecuencia un sistema para el enfoque sistémico es un conjunto de elementos que interrelacionados entre si cumplen una función en un entorno y a medida que transcurre el tiempo ven evolucionando su estructura y organización que conserva su identidad.

Un sistema tiene principios y propiedades.

PRINCIPIO Y PROPIEDADES DEL SISTEMA GENERALIZADO

a) Entorno.- Es un principio que afirma que todo sistema se encuentra en un sistema mayor o entorno, activamente relacionado modificando dicho entorno.
b) Estructura.- Es el principio que afirma que todo sistema es identificado como un conjunto de elementos que pertenecen a un entorno y que se encuentra interrelacionado siguiendo un fin común.
c) Frontera.- Es el principio que establece que el sistema puede ser diferenciado del entorno identificando los elementos que pertenece al sistema en un momento determinado del tiempo.
d) Organización.- Se define como el conjunto de relaciones relevantes entre los elementos de un sistema en un instante en el tiempo.

e) **Equifinalidad.**- Un sistema se origina para cumplir una función en el entorno, la equifinalidad afirma que ante diversas circunstancias, condiciones y organización el sistema siempre procurara alcanzar su objetivo o función.
f) **Sinergia.-** Afirma que la suma total de las funcionalidades de los elementos integrados en el sistema es mayor en conjunto que la suma individual de la funcionalidades de los elementos.
g) **Retroalimentación.-** El sistema al cumplir una función en el entorno modifica dicho entorno y la capacidad de conocer los efectos que tienen la actividad de un sistema se denomina retroalimentación existen 2 tipos de retroalimentación (+) y (-). En la positiva se encuentra el sistema en un proceso de amplificación de influencias externas y el negativo disminuye el sistema la influencia externa hacia un equilibrio.
h) **Adaptabilidad.-** Ante cambios en el entorno el sistema es capaz de modificar la estructura para asegurar su existencia conservando su equifinalidad.
i) **Morfoestasis.**- Es la forma como se adaptan los sistemas, se aíslan de la influencia del entorno cambiante para conservar su estructura y conservar su objetivo.
j) **Morfogénesis.**- Puede cambiar toda su estructura y se adapta al cambio del entorno, origina (megaentropia) es la medida a la adaptación del sistema, entropía tendencia al desorden, la entropía es la medida que representa la capacidad de organización del sistema conservando relaciones de valor.
k) **Emergencia.-** Este principio se refiere a que la descomposición de un sistema, llega a definir un nuevo sistema cualitativamente diferente constituyendo una nueva totalidad denominada subsistema.
l) **Subsistema.-** Conjunto de elementos y relaciones que corresponden a estructuras y funciones especializadas dentro de un sistema mayor.
m) **Transferencia.-** Es la capacidad de compartir la misma representación simbólica de estructuras organización y propiedades entre sistemas diferentes con interpretaciones también diferentes. Este principio se inicia con el mismo sistema generalizado o universo.

TENDENCIA DE LA TEORÍA GENERAL DEL SISTEMA.

Al considerar que el autor de Teoría General de Sistemas es un biólogo, se hace evidente que bajo la visión de la teoría general de sistemas se han desarrollado diversas tendencias conservando un mismo marco conceptual; pero en diferentes ramas, los principales fueron ramas biológicas, económicas, sociales, ciencias exactas, ciencias de la información y representación de sistemas, las que nos interesan son estas ultimas y entre ellas podemos destacar:

Cibernética.- campo interdisciplinario que abarca el ámbito de los procesos, comunicación y control tanto entre seres vivos como entre maquinas.

Dinámica de sistemas: Considerando la realidad orgánico, funcional y genética (cambios en el tiempo).

Existen dos sistemas estáticos y sistemas dinámicos.

- Los sistemas estáticos no cambian, por ejemplo: las matemáticas.
- Los sistemas dinámicos donde tienen base en el tiempo.

La diferencia entre ambas es que existe una variable en el tiempo, que vuelve al sistema dinámico.

Teoría de la información.- Visión sistémica que estudia y explica el origen, generación, representación, procesamiento e interpretación de la información.

Dinámica de Sistemas

En el Enfoque Sistémico un Sistema es definido por una red de relaciones entre los diferentes elementos de un sistema; la organización de esta red y los valores o atributos que toman los elementos determina lo que se conoce como comportamiento de sistema, el cual varía con el tiempo. La dinámica de sistemas combina la teoría, los métodos y la filosofía para analizar el comportamiento de los sistemas y fue desarrollada por Jay Forrester.

La dinámica de sistemas surgió de la búsqueda de una mejor comprensión de la administración. Su aplicación se ha extendido ahora al cambio medio ambiental, la política, la conducta económica, la medicina y la ingeniería, así como a otros campos.

HISTORIA DE LA DINÁMICA DE SISTEMAS

Forrester, ingeniero de sistemas del Instituto Tecnológico de Masachussets (MIT) desarrolló esta metodología durante la década de los cincuenta. La primera aplicación fue el análisis de la estructura de una empresa norteamericana, y el estudio de las oscilaciones en las ventas de esta empresa, publicada como "Industrial Dynamics". En 1969 se publica la obra Dinámica Urbana, en la que se muestra cómo el "modelado DS" es aplicable a sistemas de ciudades. En 1970, aparece El modelo del mundo, trabajo que sirvió de base para que Meadows y Meadows realizasen el I Informe al Club de Roma, divulgado posteriormente con el nombre de "Los límites del crecimiento". Estos trabajos y su discusión popularizaron la Dinámica de Sistemas a nivel mundial.

Forrester estableció un paralelismo entre los sistemas dinámicos (o en evolución) y uno hidrodinámico, constituido por depósitos, intercomunicados por canales con o sin retardos, variando mediante flujos su nivel, con el concurso de fenómenos exógenos.

La dinámica de sistemas, permite en estos días ir más allá de los estudios de casos y las teorías descriptivas. La dinámica de sistemas no está restringida a sistemas lineales, pudiendo hacer pleno uso de las características no-lineales de los sistemas. Combinados con los ordenadores, los modelos de dinámica de sistemas permiten una simulación eficaz de sistemas complejos. Dicha simulación representa la única forma de determinar el comportamiento en los sistemas no-lineales complejos.

Actualmente, bajo la supervisión de Forrester, y con el auspicio del MIT se desarrolla la aplicación del a DS a campos sociales, priorizando la educación y el aprendiza en Norteamérica. El Capitulo de DS del MIT brinda información para la aplicación y el aprendizaje de DS, pudiendo obtenerse la guía "Roads Map RM" de manera gratuita. Esta Guía esta disponible de manera parcial en español en el Capitulo latinoamericano de DS.

Capitulo DS MIT: http//sysdyn.clexchange.org
Capitulo Latinoamericano DS: http//dinamica-sistemas.mtyitesm.mx

DEFINICIÓN DE LA DS

Para dar una definición de DS debemos primero comprender los términos que componen esta definición.

SISTEMA: Orgánico (definición clara de los elementos y la red de relaciones) + Funcional (la actividad e influencia del entorno) + Genético (Cambios a medida que transcurre el tiempo)

DINAMICA: Los atributos o valores que toman los elementos de un sistema se pueden asociar con variables. El valor de dichas variables cambia con el tiempo, como consecuencia de la interacción de los elementos. El COMPORTAMIENO vendrá dado por el conjunto de trayectoria de las variables describiendo lo acontecido con el sistema en el transcurso del tiempo.

En consecuencia, Dinámica de Sistemas es una metodología ideada para estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos, con la finalidad de comprender dicho comportamiento y así poder evitar comportamientos indeseables, por medio del desarrollo de modelos y con ellos (simulación) establecer estrategias de solución a estos últimos.

La dinámica de sistemas es empleada para resolver problemas concretos. Los campos de aplicación de la dinámica de sistemas son muy variados. Por ejemplo, para construir modelos de simulación informática, sistemas sociológicos, ecológicos y medioambientales. Otro campo interesante de aplicaciones es el que suministran los sistemas energéticos, en donde se ha empleado para definir estrategias de empleo de los recursos energéticos. Se ha empleado también para problemas de defensa, simulando problemas logísticos de evolución de tropas y otros problemas análogos.

NOCIÓN DE SISTEMA DINÁMICO

La característica fundamental de un sistema dinámico es la evolución del sistema en el tiempo.
Para modelarlo es necesario Determinar las interacciones que permiten observar su evolución:

Limites del sistema

Selección de aquellos componentes que sirvan para generar los modos de comportamiento.
Espacio en donde se llevará a cabo el estudio.
No se toman en cuenta aspectos irrelevantes.

Elementos y relaciones en los modelos.
Un sistema esta formado por un conjunto de elementos en interacción.
Del mismo modelo se pueden generar distintos modelos.

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS EN DINÁMICA DE SISTEMAS

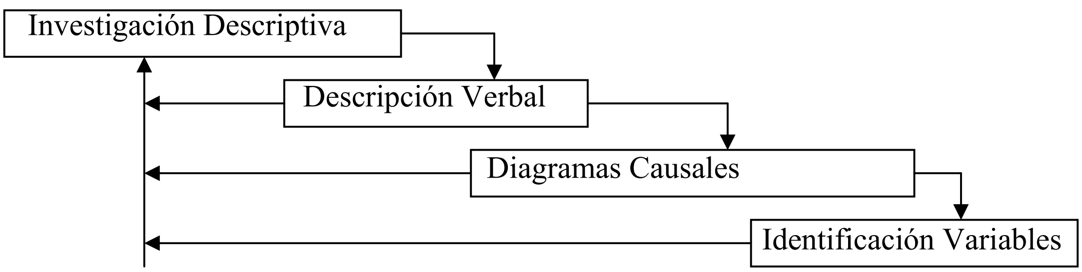
Se siguen las siguientes Fases:

CONCEPTUALIZACIÓN
Implica una investigación descriptiva para realizar una descripción detallada de un sistema empleando:
Estadística descriptiva (Estimación de parámetros)
Métodos Numéricos (Representaciones funcionales)

a) Descripción verbal del sistema
b) Definición precisa del modelo en el tiempo (días, meses, años,…)
c) Diagrama causal

Se realiza una representación grafica donde se identifican tipos de variables
- Variables de nivel
- Variables de flujo
- Variables Auxiliares

Se realiza un proceso en cascada si la representación e identificación esta incompleta.



FORMULACIÓN
d) Construcción del diagrama de Forrester
e) Establecimiento de las ecuaciones para la simulación

ANÁLISIS Y EVALUACIÓN
e) Análisis del modelo (comparación, análisis de sensibilidad, análisis de políticas)
f) Evaluación, comunicación e implementación.

EXPLOTACIÓN

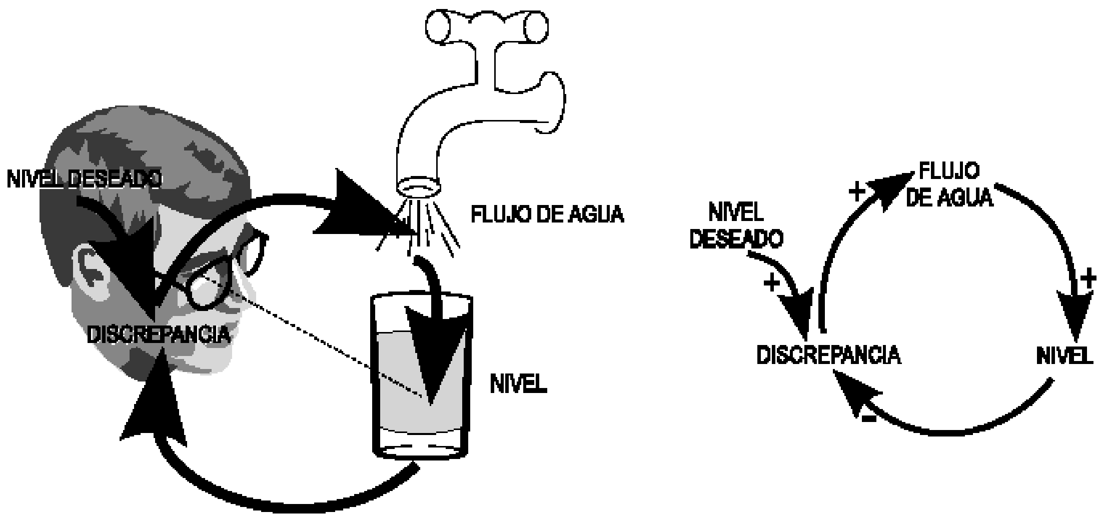
DIAGRAMAS DE INFLUENCIAS O CAUSALES

Muestran el comportamiento del sistema. Permite conocer la estructura de un sistema dinámico, dada por la especificación de las variables y la relación de cada par de variables.
Para la conceptualización mínima de un sistema dinámico se emplean:

- Conjunto de composición (elementos)
- Relaciones (Como se producen las influencias entro los elementos

En el diagrama de influencias los elementos estas representados mediante hitos textuales y las influencias mediante arcos orientados y con un signos que representa la relación de influencia entre elementos.

Por ejemplo si deseamos representar el siguiente caso: “Una persona que llena un vaso de agua mediante la observación del nivel alcanzado en el vaso actúa sobre el grifo, de manera que lo va cerrando a medida que se alcanza el nivel deseado”.



Los signos que determinan la relación de influencia indican si existe una relación positiva o negativa.

La Relación de influencia positiva indica que si el antecedente crece el consecuente también lo hace. Y si dicho antecedente decrece el consecuente decrece de igual forma.

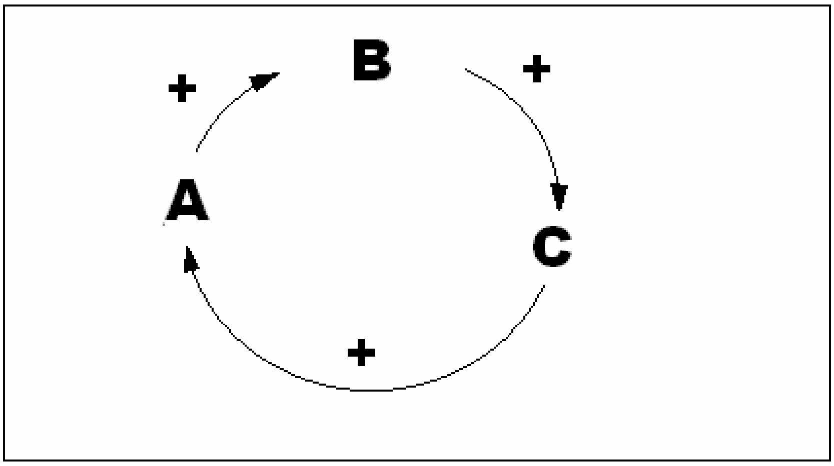
$$A \xrightarrow[+]{\qquad} B$$

La Relación de influencia negativa indica que si el antecedente crece el consecuente decrece. Y si dicho antecedente decrece él consecuente crece.

$$A \xrightarrow[-]{\qquad} B$$

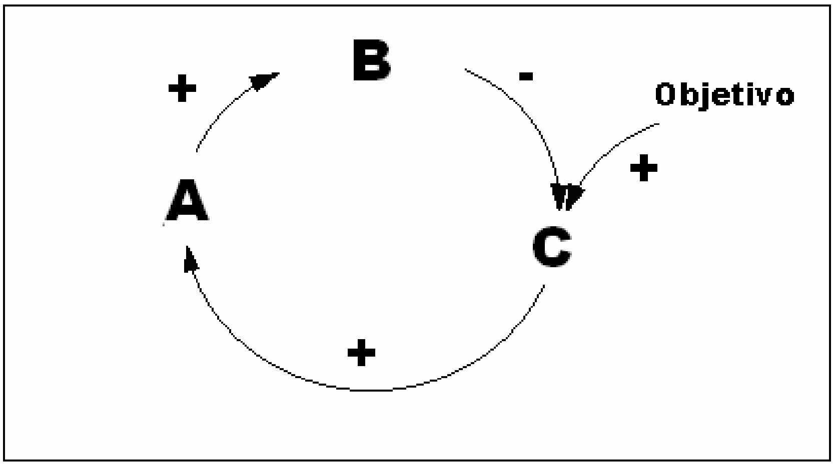
Al existir ciclos o bucles en los diagramas de influencia podemos definirlos como:

BUCLES DE RETROALIMENTACIÓN POSITIVA: Son aquellos en los que la variación de un elemento se propaga a lo largo del bucle de manera que refuerza la variación inicial.



Es importante considerar que un bucle un número par de influencias negativas se anulan, volviendo al bucle en uno de retroalimentación positiva.

BUCLES DE RETROALIMENTACIÓN NEGATIVA: Son aquellos en los que la variación de un elemento se propaga a lo largo del bucle de manera que contrarreste la variación inicial por medio de un numero impar de influencia negativas. TIENDE A CREAR EQUILIBRIO porque se caracterizan por tener un comportamiento determinado por un objetivo.



Con las consideraciones del punto anterior ya tenemos una manera de conceptualizar los elementos básicos para una descripción esquemática de un sistema dinámico. Conceptualizar en este caso consiste en identificar la serie de elementos entre los que se producen influencias.

Esta actividad terminará clasificando los elementos hallados en tres categorías las cuales se emplearan en la formulación del modelo, estas categorías son:

- Variables de Nivel, son las variables más importantes y representan magnitudes cuya evolución es el objetivo del estudio, se caracterizan por ser magnitudes escalares (valor con unidad).
- Variables de Flujo, determinan la variación de una variable de nivel a lo largo del tiempo, se caracterizan por estar asociadas a una unidad de tiempo.
- Variables auxiliares, que representan elementos intermedios para la determinación de flujos a partir de las variables de nivel, impuestas por el entorno a por el propio sistema.

FORMULACION DEL MODELO

Esta actividad consiste en la construcción de los Diagramas de Forrester, empleando para ello las variables determinadas en la etapa de conceptualización.

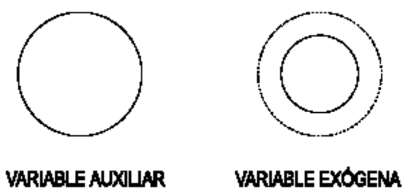
DIAGRAMAS DE FORRESTER.

Son diagramas causales en los que los elementos de un sistema se representan empleando la siguiente notación

1. Niveles. (variables de nivel) las cuales pueden ser depósitos o nubes

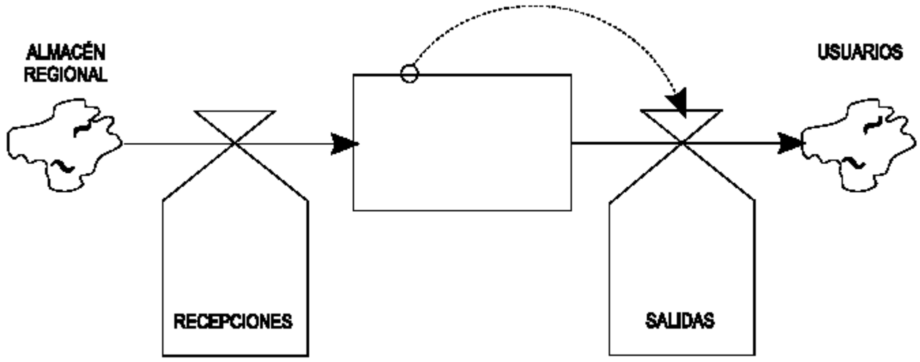
2. Flujos (variables de flujo)

3. Variables Auxiliares



4. Otras Representaciones

Asi por ejemplo una representación con diagramas de Forrester sería:



Para formular un modelo en DS se emplean un conjunto de Estructuras Genéricas, las cuales nos permiten una representación mas concreta y particular, permitiendo adicionalmente determinar la Ecuaciones del Modelo. Estas Estructuras Genéricas y sus respectivas Ecuaciones serán estudiadas en el próximo tema.

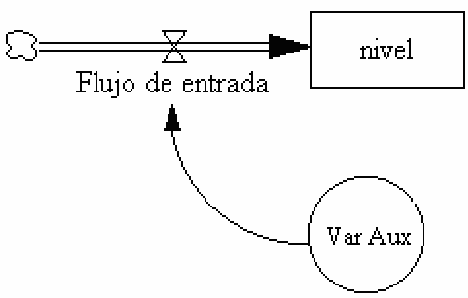
SISTEMAS DINAMICOS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN.

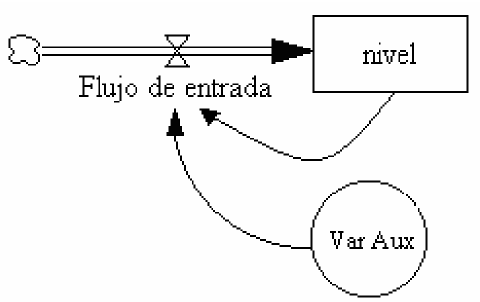
Los sistemas dinámicos se pueden clasificar de acuerdo a los niveles o variables en los cuales centra un estudio en DS, según ello podemos definir la siguiente clasificación.

Sistemas dinámicos de primer orden

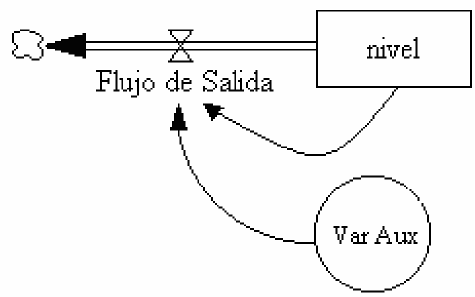
Este tipo de sistemas dinámico posee un único nivel en su estructura y además pueden estar formados por bucles de realimentación positiva o por bucles de realimentación negativa.

Los sistemas de primer orden no presentan oscilaciones, ya que este tipo de sistemas solo cuenta con un nivel en su estructura, esto es que si el nivel con el que cuentan llega a un punto de equilibrio temporal difícilmente podrá salir de él. Para salir de esta situación es necesario que el flujo de salida del nivel dependiese de alguna otra variable que evolucione con el tiempo, lo que nos lleva a concluir que para que se produzcan oscilaciones se necesitan dos o más niveles; característica de los sistemas de segundo orden. Adicionalmente estos sistemas se caracterizan por presentar **comportamiento lineal o comportamiento exponencial** cuando existe retroalimentación.

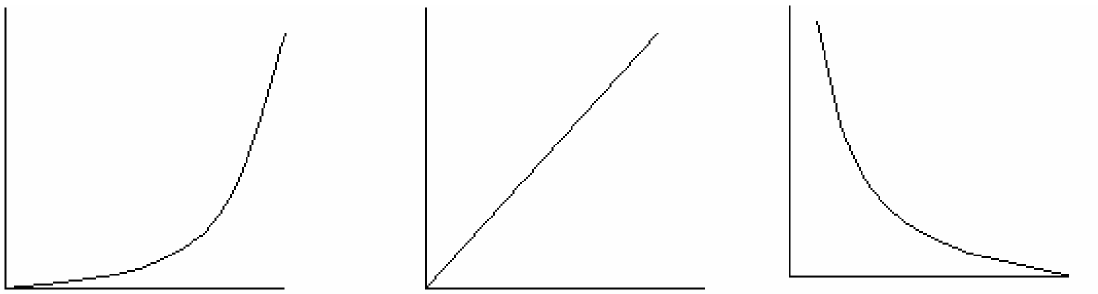




Flujo Constante (Lineal) Retroalimentación Positiva (Crec. Expon.)



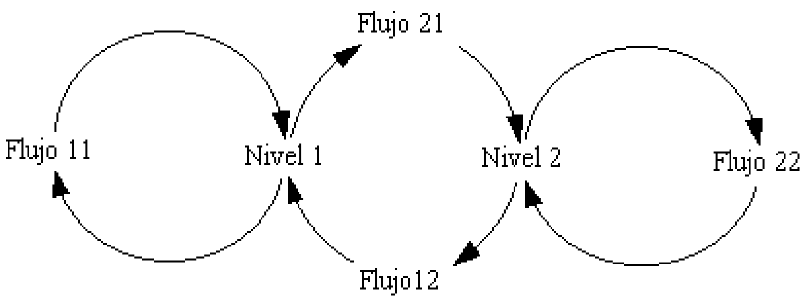
Retroalimentación negativa (Decrec. Exponencial)

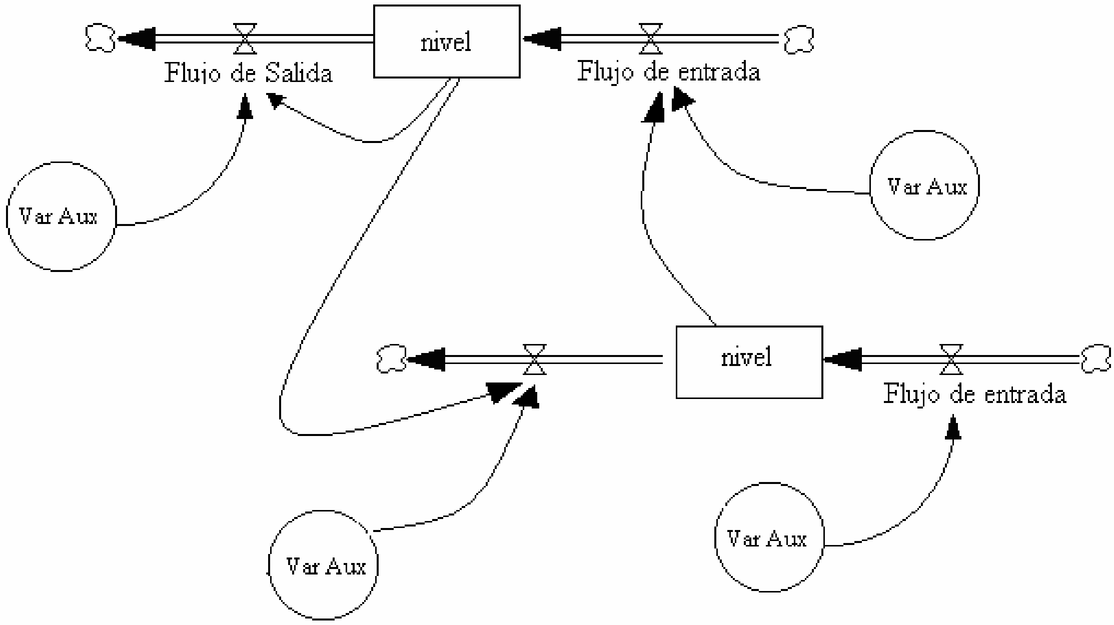


Crecimiento Exponencial   Crecimiento Lineal   Decrecimiento Exponencial

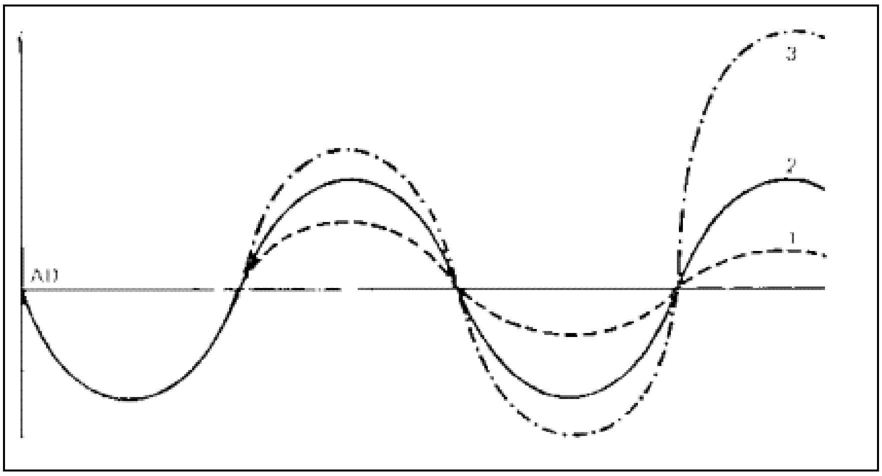
Sistemas dinámicos de segundo orden

Los sistemas dinámicos de segundo orden cuentan con dos niveles de en su estructura, estos niveles se encuentran inmersos en un número de hasta tres bucles realimentados, siendo uno de estos el principal y dos bucles más que son los secundarios. El bucle principal conecta a los dos niveles mientras los secundarios conectan a un nivel consigo mismo. La característica más importante de los sistemas de segundo orden es el hecho de que tienen la posibilidad de presentar oscilaciones, dado esto por la presencia de los dos niveles en su estructura.





Un sistema dinámico de segundo orden puede presentar oscilaciones, las cuales pueden clasificarse en Amortiguadas, Mantenidas y Crecientes.



(1)Amortiguadas, (2) Mantenidas y (3) Crecientes.

Los sistemas oscilantes abundan en la naturaleza, por ejemplo los patrones del dormir - despertar de una persona, el número de manchas solares, la economía nacional, el péndulo del reloj antiguo del abuelo, etc. Mientras que una persona promedio observa un sin número de sistemas oscilantes a través de la vida, comprender el por que de ese comportamiento resulta ser algo muy interesante.

Aplicación de la Dinámica de Sistemas

Para la aplicación de la dinámica de sistemas su autor, J Forrester, plantea un conjunto de sistemas dinámicos elementales, que pueden ser empleados, combinándoles, para la construcción de sistemas más complejos.
A estos sistemas elementales se les denomina estructuras genéricas, y se pueden clasificar en estructuras genéricas de primer orden o de segundo orden.

ESTRUCTURAS GENÉRICAS DE PRIMER ORDEN.

Una estructura genérica es un sistema elemental o básico en dinámica de sistemas, se considera primer orden pues solo se tiene un nivel en su estructura.

Son:

a) Sistemas con retroalimentación positiva
b) Sistemas con retroalimentación negativa
c) Sistemas con flujos constantes
d) Sistemas con comportamientos en S

a) Sistemas con retroalimentación positiva.- Un sistema con retroalimentación positiva de primer orden se caracteriza por tener un nivel y un flujo inmersos en un bucle de retroalimentación positiva su estructura mínima es la siguiente.

Diagrama de Influencia

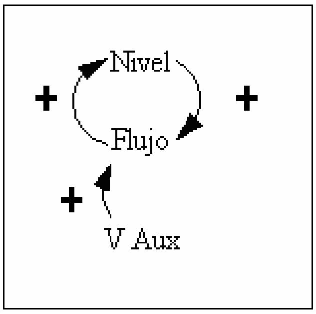
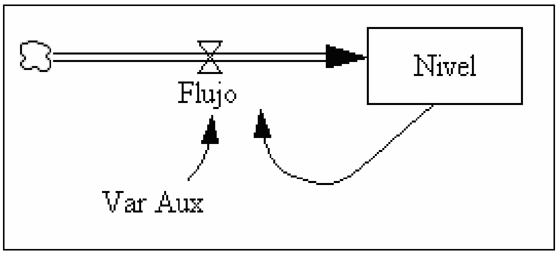


Diagrama de Forrester



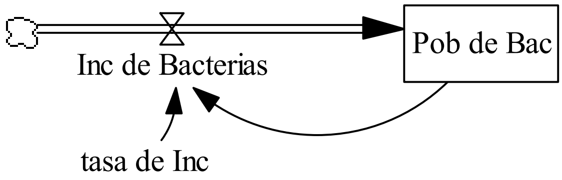
Ecuación del modelo

dt = Unidad de tiempo
Nivel (To) = Ctte (unidad)
Nivel (t) = Nivel (t-dt) + flujo (t) * dt
Flujo (t) = Nivel (t-dt) * Var Aux
Var Aux = ctte 1/dt

Ejemplo:
En un laboratorio se realiza el estudio de la población de cierto tipo de bacteria se ha llegado a determinar que el lapso se una semana la población de bacterias se incrementa en un 25% si la población inicial de esta bacteria fue de 5 millones de especies cual sera la población al cabo de un mes.

Solucion:

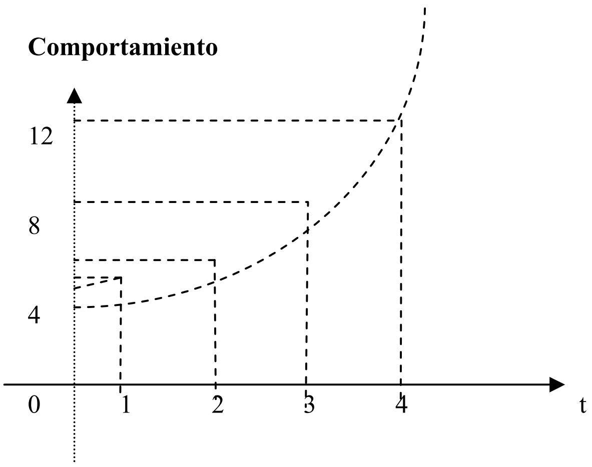
Nivel: Población de bacterias tasa Inc = 25% 1/semana



dt = semana
Nivel (0) = 5 (millones bacterias)
Nivel (t) = Nivel (t-1) + Flujo (t) * semana
Flujo (t) = Nivel (t-1) * tasa Inc
Tasa de Inc = 0.25 * 1/semana

Población de bacterias (0) = 5 (millones bacterias)
Población de bacterias (t) = Pob de Bac (t-1) + Inc de Bact (t) * semana
Inc de bacterias (t) = Pob de Inc (t-1) * tasa de Inc
Tasa Inc = 0.25 1/semana

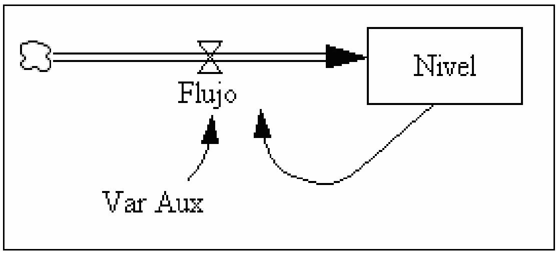
Comportamiento



Semana	Pob de Bact	Inc de Bact
0	5	-
1	6.25	1.25
2	7.81	1.56
3	9.76	1.95
4	12.20	2.44
5		

Un sistema con retroalimentación positiva de primer orden siempre tendrá un comportamiento de crecimiento exponencial lo que implica que su comportamiento continuo será una función dependiente de la función exponencial.

Origen del comportamiento continúo



Si definimos a r = Var. Aux.
dt = t
Nivel (0) = C
Flujo (t) = Nivel (t-1) * r

Nivel (1) = Nivel (0) + flujo (1) ➔ Nivel (1) = c + c * r
Flujo (1) = Nivel (0) * r

Nivel (2) = Nivel (1) + flujo (2) ➔ Nivel (2)= Nivel (1) + Nivel (1) * r
= Nivel (1) (1+r)
Flujo (2) = Nivel (1) * r = C (1 + r) (1+r)
$= C (1 + r)^2$

En general

$\text{Nivel}(t) = c (1 + r)^t$

Si r se encuentra en meses y se desea el efecto en semanas (1 mes = 4.5 semanas) ➔ r / 4.5 y t * 4.5

Si r se encuentra en meses y se declara el efecto en días(1 mes = 30 días) ➔ r / 30 y t * 30
En general n = valor de división y nivel (t)
➔ $C (1+r / n)^{t*n}$
Para hallar el comportamiento continúo n ➔ ∞
$\text{Nivel}(t) = \text{Lim}_{n \to \infty} (1+r/n)^{t*n}$

$$\textbf{Nivel (t)} = \mathbf{C * e^{r\,t}} \text{ Ecuación Continua}$$

Sin embargo se tiene que ajustar **r** para un cálculo exacto y acorde al comportamiento discreto.

Ecuaciones Discretas
dt = Tiempo (discreto)
$t_1 = to + dt$
$t_2 = t_1 + dt$
Nivel (to) = ctte
Nivel (t) = Nivel (t-dt) + flujo (t) * dt
Flujo (t) = Nivel (t-dt) * Var Aux
Var Aux = ctte 1/dt

Ecuaciones Continuas
T: tiempo continuo
Nivel (to) = C
$\text{Nivel}(t) = C e^{r\,t}$
r = ctte

Considerando el ejemplo anterior del estudio de las bacterias determinadas en que tiempo exactamente se duplicara la población inicial.

dt = Semana
Pob bac (0) = 5
Pob bac (t) = Pob bac (t-1) + Inc Bac (t)
Inc Bac (t) = Pob Bac (t-1) * 0.25

Semana	Pob Bac	Inc Bac	$5\ e^{0.25\ t}$	$5\ e^{0.22\ t}$
0	5		5	5
1	6.25	1.25	6.42	6.25
2	7.81	1.56	8.24	7.81
3	9.76	1.95	10.59	9.76
4	12.20	2.44	13.59	12.20

Nivel (t) = $5\ e^{0.25\ t}$
Nivel (t)) $5\ e^{0.25\ t} \rightarrow 5\ e^{r1\text{-}1} = 6.25$
$e^{r1} = 6.25/5$
$r_1 = \text{Ln } 6.25/5$
$r_1 = 0.22$ (r ajustado)

i) Tiempo Duplicación
Nivel (0) = C = C $e^{r\ 0}$
Nivel (t) = 2 C = C $e^{r\ t}$

$$\frac{C\ e^{r\ t}}{C\ e^{r\ 0}} = \frac{2C}{C}$$

$e^{r\ t - r\ 0} = 2$
$e^{r\ t} = 2$
r t = Ln 2 ➔ **t = ln2 / r**

Para nuestro ejemplo
t = ln2 / 0.223 = 3.108

Ejemplo

En la ciudad de El Alto fue creada en el año 1985 inicialmente tuvo una población de 290000habitantes con una tasa de de crecimiento anual del 21% en cuantos años la ciudad de El Alto duplicara su población a partir de su fundación, en cuantos años logro tener 700000 habitantes y en cuantos años llegara a tener 1000000

meses	$290\ e^{0.19\ t}$
0	290
1	350.6
2	424.06
3	512.79
4	620.10
5	749.85
6	906.76
7	1096.50
8	1325.94
9	1603.39
10	1938.90
11	2344.62
12	2835.23

Pob (0) = 290 ➔ Pob (t) = 290 $e^{0.21\ t}$
r = 0.21
290 e^{r1} = 350.9
r_1 = ln (350.9/290) = ln (1.21)
r_1 = 0.19 ➔ Pob (t) = 290 $e^{0.19\ t}$

a) Pob (0) = 290 = 290 $e^{0.19\ *\ 0}$ ➔ 880/290 = 290 $e^{0.19\ t}$/290
Pob (t) = 580 = 290 $e^{0.19\ t}$
T = ln2 / 0.19 = 3.64

b) Pob (0) = 290 ➔ 700 / 290 = 290 $e^{0.19\ t}$/ 290
Pob (t) = 700

T = ln (700/290) / 0.19 = 4.63

c) Pob (0) = 290 ➔ 1000 / 290 = 290 $e^{0.19\,t}$ / 290
t = ln (1000/290) / 0.19 = 6.51

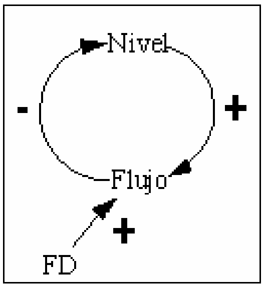
b) Sistemas de retroalimentación Negativa de Primer Orden.- Como hemos de definido anteriormente la retroalimentación en un sistema depende de un objetivo, este proceso ara que el sistema se oriente o dirija hacia el objetivo.

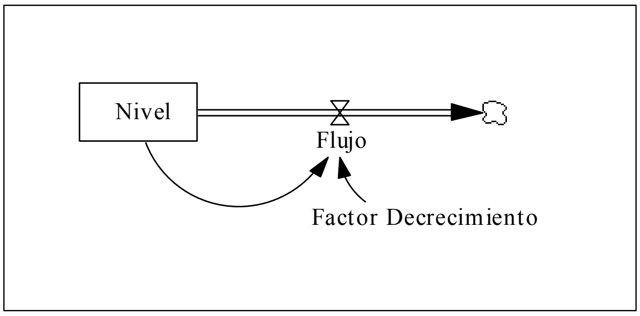
En el caso de Dinámica de sistemas la finalidad de la retroalimentación negativa es hacer que la magnitud del nivel se aproxime hacia el objetivo planteado.

Asumiendo que la mayoría de los niveles cuentan con unidades que no admiten valores negativos, se pueden plantear 2 tipos de objetivos.

***El Primero* "*META CERO*"** Intentará hacer desaparecer la magnitud del nivel.
***El Segundo* "*META DISTINTA DE CERO*"** Hará que la magnitud del nivel se dirija y aproxime a un valor mayor que cero.

Retroalimentación Negativa Meta Cero.-





Ecuaciones del modelo.-

Dt = tiempo
Nivel (0) = ctte
Nivel (t) = Nivel (t-dt) – flujo (t) dt
Flujo (t) =Nivel (t-dt) * FD
FD = ctte 1/dt

Ejemplo:

Un artefacto eléctrico trabaja con una batería de 9 voltios y consume el voltaje hasta que la batería sea inservible, si el artefacto requiere de un voltaje mínimo de 6 voltios y su funcionamiento desgasta la vertía en un 5 % por hora de funcionamiento en cuantas horas el artefacto dejara de funcionar.

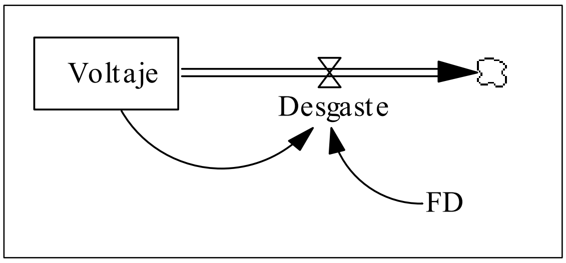
Dt = hora

Voltaje (0) = 9v

Volt (t) = Volt (t-1) – Desgaste (t)

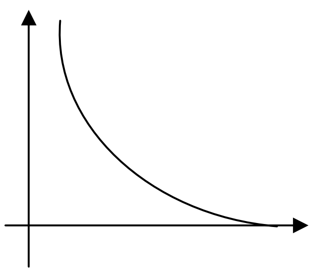
Desgate (t) = Volt (t-1) * FD

FD = 5 % = 5/100 = 0.05



Hora	Volt	Desgaste
0	9	-
1	8.55	0.45
2	8.12	0.43
3	7.71	0.41
4	7.32	0.38
5	6.95	0.36
6	6.60	0.34
7	6.27	0.33
8	5.95	0.31

Decrecimiento Asintótico a 0 (Nunca llega a ser 0)



Ecuaciones Continuas

Nivel (t) = Ce $^{-rt}$

$Ce^{-rt} = 6$

$9e^{-rt} = 6$

$-rt = \ln(6/9)$

$-0.05\,t = -0.67$

$T = 0.67 = 8.11$

0.05

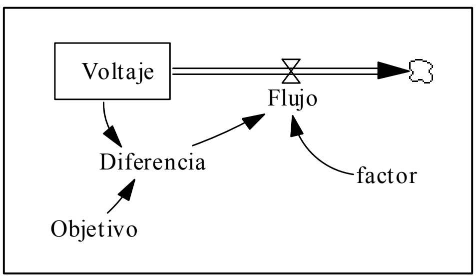
$9\,e^{-r} = 8.55$

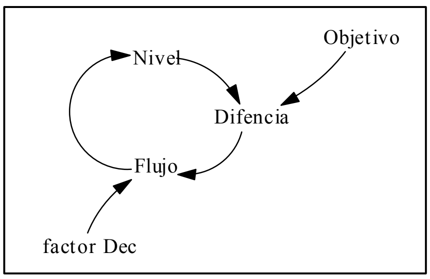
$r = -\ln(8.55/9)$

$r = 0.0512$

Retroalimentación Negativa (Meta <> 0).

Se fija un objetivo y una diferencia con el nivel actual. El objetivo del sistema es hacer desaparecer la diferencia

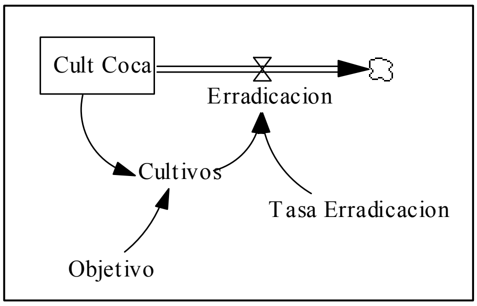




Ecuaciones del modelo

Dt = tiempo
Nivel (0) = ctte
Diferencia (t) = Nivel (t-dt) – Objetivo
Objetivo = ctte
Nivel (t) = Nivel (t-dt) – Flujo (t) dt
Flujo (t) = Diferencia (t) * Fac. Dec
Factor Dec = ctte 1 / dt

Ejemplo:
En la republica de Bolivia actualmente existen 35000 hectáreas de cultivo de coca, por convenios internacionales solo deberían existir 20000 hectáreas de cultivo de coca, la cooperación internacional brindara los recursos necesarios a la FELC de tal manera que se erradique los cultivos sedentarios con la condición de que por año estos sea reducidos en 15% ¿En cuanto tiempo se habrá reducido la mitad de los cultivos exedentarios.



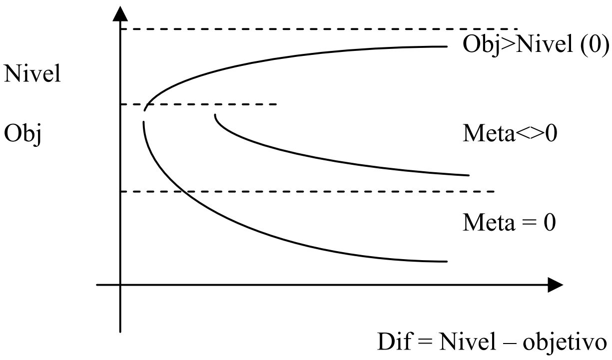
Dt = años
Cult Coca (0) = 35000
Cult Exed (t) = Cult Coca (t -1) – Objetivo
Objetivo = 20000
Cult Coca (t) = Cult Coca (t -1) – Erradicación (t) dt
Erradicación (t) = Diferencia (t) * Fac Dec
Factor Dec = 15 % 1 / 100 = 0.15%

Año	Cult Coca	Cult Ex	Erradicación
0	35	-	-
1	32.75	15	2.25
2	30.84	12.75	1.91
3	29.21	10.84	1.63
4	27.82	9.21	1.38
5	26.65	7.83	1.17
6	25.48	6.66	0.99
7	24.63	5.67	0.85
8	23.91	4.82	0.72
9	23.3	4.1	0.61

Dif = $Coe^{-r\,t}$
Nivel = Obj + $Coe^{-r\,t}$ Co = Nivel (0) – objetivo

$15\ e^r = 12.75$
$e^r = 12.75 / 15$
$r = \ln (12.76/15) = - 16.25\%$
$\ln 2/0.16.25 = t\ ½ = 4.26$

La retroalimentación negativa se caracteriza por tener un comportamiento denominado decrecimiento asintótico sin embargo si en el modelo se plantea un objetivo mayor que el nivel la diferencia se convertirá en una magnitud negativa obligando al flujo a cambiar y ser uno de entrada en lugar de salida ocasionando lo que se llama crecimiento asintótico.



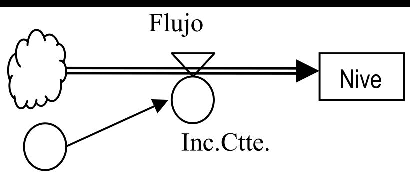
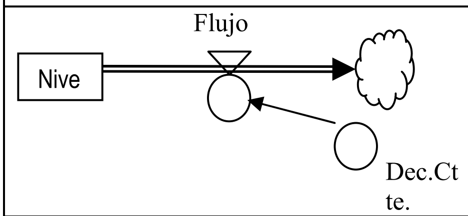
Dif = Nivel – objetivo ➔ Dif < 0
Flujo = dif V.A. ➔ flujo < 0
>0
Nivel (t) = Nivel (t-1) – flujo
= Nivel (t-1) + flujo

En consecuencia decimos que la retroalimentación tiene un comportamiento asintótico

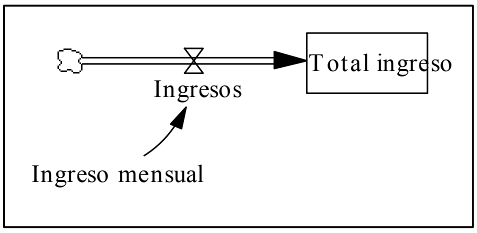
iii) Flujo de Constantes

En el caso de la retroalimentación positiva o negativa se considera el nivel al momento de realizar el cálculo de los respectivos flujos lo que ocasionaba un comportamiento asociado al exponencial.

Si se deja de lado la influencia del nivel en el flujo y se asocia al mismo un crecimiento constante que ocasiona un comportamiento lineal con pendientes positiva para los flujos de salida. Es importante aclarar que en esta estructura genérica no existen bucles de retroalimentación.

Diagrama de Forester	Ecuaciones del Modelo	Pendiente
	dt = tiempo Inc.Ctte.(0) = Ctte (unidades) Nivel(0) = Ctte(unidades) Nivel(t) = Nivel(t-1) + Flujo(t) Flujo(t) = Inc.Ctte.	Positiva
	dt = tiempo Dec.Ctte.(0) = Ctte (unidades) Nivel(0) = Ctte(unidades) Nivel(t) = Nivel(t-1) - Flujo(t) Flujo(t) = Dec.Ctte.	Negativa

Ejemplo:
Flujos constantes
Una empresa que llega a alcanzar un equilibrio financiero establece que de manera mensual tiene un ingreso constante de 1.2 millones y un ingreso constante por gastos de 1.02, se asume que sus operaciones empiezan en 0.



a) determinar el total de ingresos para 1 año.
Dt = meses
Total Ingresos (0) = 0
Total Ingresos (t) = Total Ingresos (t-1) + Ingresos
Ingresos (t) = Ingreso Mensual
Ingreso mensual = 1,2

Mes	Total Ingreso	Ingreso
0	0	-
1	1.2	1.2
2	2.4	1.2
3	3.6	1.2
4	4.8	1.2
5	5	1.2
6	6.2	1.2
7	7.4	1.2
8	8.6	1.2
9	9.8	1.2
10	10	1.2
11	11.2	1.2
12	14.4	1.2

d) Comportamiento en S

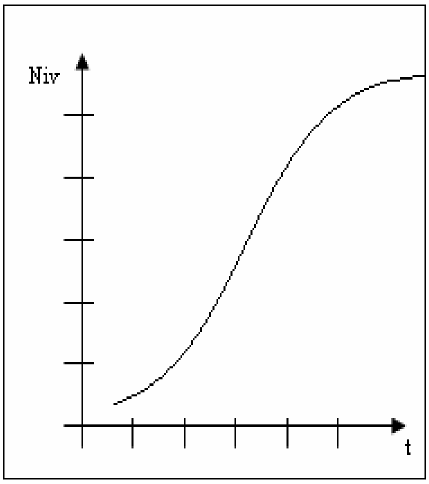
Otra estructura elemental que trabaja con un nivel es aquella que cuenta con 2 bucles de retroalimentación uno positivo y otro negativo, el efecto de los flujos asociados a estos bucles ocasiona el denominado crecimiento o comportamiento en S.

Un sistema que presenta un comportamiento en S comienza con un dominio del bucle de retroalimentación positivo una apariencia de retroalimentación positiva en apariencia el bucle de retroalimentación positivo esta inactivo o es muy pequeño.

A medida que la magnitud del nivel se incrementa gracias al bucle negativo y de su flujo de salida se incrementa en consecuencia directa de un proceso de saturación.

El hecho de sobrepasar un límite ocasionara un determinado efecto de nivel que incrementara en una proporción mayor a uno, los factores de decrecimiento del bucle de retroalimentación negativo.

La estructura genérica del comportamiento en S intenta representar las condiciones de un medio ambiente entorno, ante el comportamiento de un nivel.



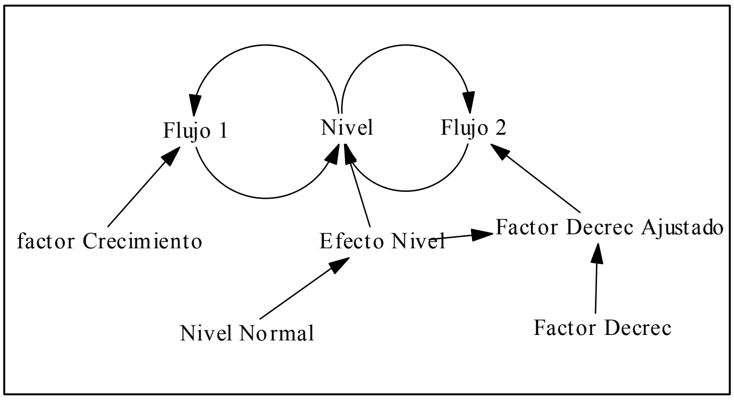
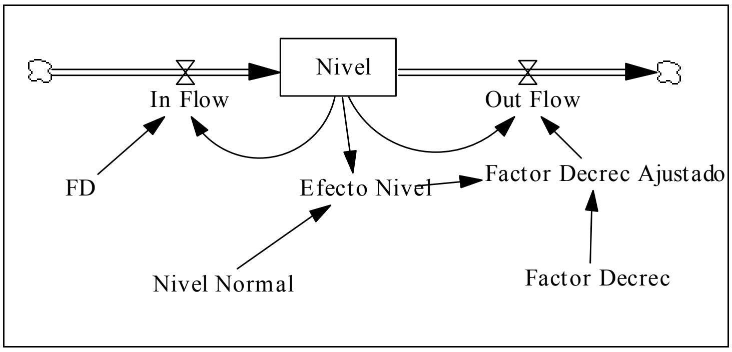


Diagrama de Forrester



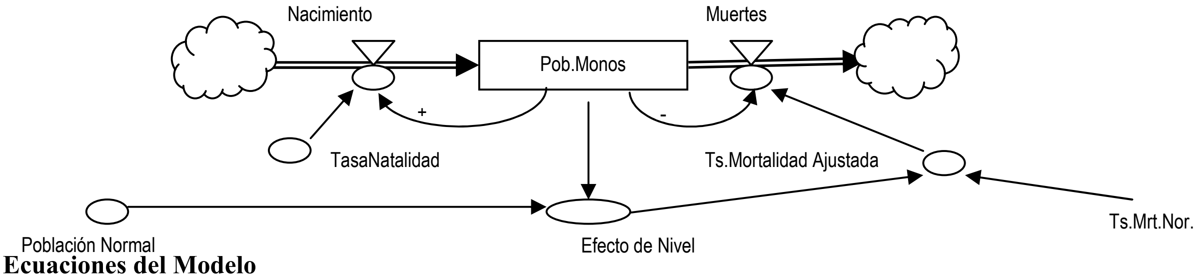
Ecuaciones del Modelo

Dt = tiempo
Nivel (0) = ctte
Nivel (t) = Nivel (t-dt) + (Inflow (t) – outflow (t)) dt
Inflow (t) = Nivel (t-dt) *FC
FC = ctte 1/dt
Outflow (t) = Nivel (t-dt) * FD Ajustado (t)
FD Ajustado (t) = FD * Efecto Nivel (t)
FD = ctte 1/dt

Efecto de Nivel (t) = { 1 Nivel (t) <= Nivel Normal
F(Nivel (t)Nivel Normal) Nivel (t) > Nivel Normal
➢ 1

Ejemplo: En un bosque tropical se estudia el comportamiento de la población del mono gris, esta especie tiene una natalidad normal de 17% anual y una tasa de mortalidad normal del 12%. El área del bosque puede sostener una población normal de 500 especimenes por cada 10 unidades ensima de este límite la tasa de mortalidad se incrementa en un 10% de la original si la población inicial es de 300 individuos ¿Cuál es el límite poblacional después de 20 años? ¿En qué año se alcanza a este límite?

Diagrama de Forester



Ecuaciones del Modelo

dt = Años
Pob.Monos(0) = 300
Pob.Monos(t) = Pob.Monos(t-1) + (Nacimiento(t) – Muertes(t))
Nacimiento(t) = Pob.Monos(t-1) * TasaNatalidad
TasaNatalidad = 0.17
Muertes(t) = Pob.Monos(t-1) * Ts.Mortalidad Ajustada(t)
Ts.Mortalidad Ajustada(t) = Ts.Mrt.Nor. * Efecto de Nivel(t)
Ts.Mrt.Nor. = 0.13

$$\text{Efecto de Nivel(t)} = \begin{cases} 1 & \text{Pob.Monos(t)} \leq \text{Población Normal} \\ \text{F(Pob.Monos(t), Población Normal)} & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

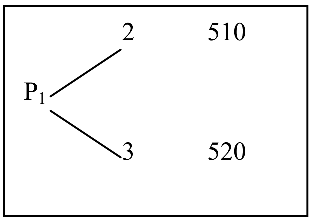
Y = Efecto Nivel (es una recta)

$$\frac{Y - Y_0}{X - X_0} = \frac{Y_0 - Y_1}{X_0 - X_1}$$

$$\frac{\text{E.N.} - 1}{\text{Pob.Monos} - \text{Pob.Normal}} = \frac{1 - 1.1}{300 - 500}$$

Analicemos el efecto de nivel

X	Y
Pob.Monos	E.N.
1 500	1
Pob.Normal	Po



1 + 10% = 1.1
1.1 + 10% = 1.2
Si Po(Xo, Yo) ^ $P_1(X_1 + Y_1)$

L: $$\frac{Y - Y_0}{X - X_0} = \frac{Y_0 - Y_1}{X_0 - X_1}$$

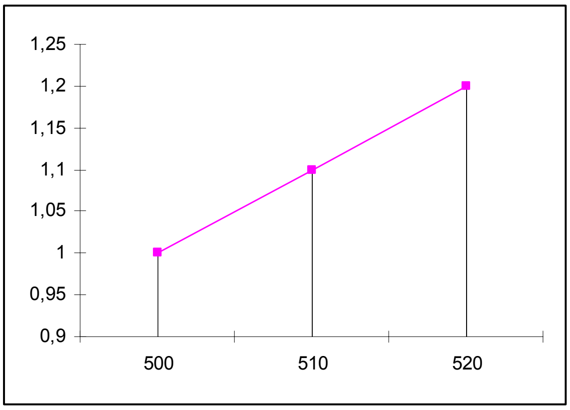
L: $$\frac{\text{E.N.} - 1}{\text{Pob.Monos} - \text{Pob.Normal}} = \frac{1 - 1.1}{510 - 500} = \frac{0.1}{10}$$

= 0.01

$$\text{Efecto de Nivel(t)} = \begin{cases} 1 & \text{Pob.Monos(t)} \leq \text{Población Normal} \\ 1+ 0.01\ (\text{Pob.Monos(t), Población Normal}) & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Para vensin:

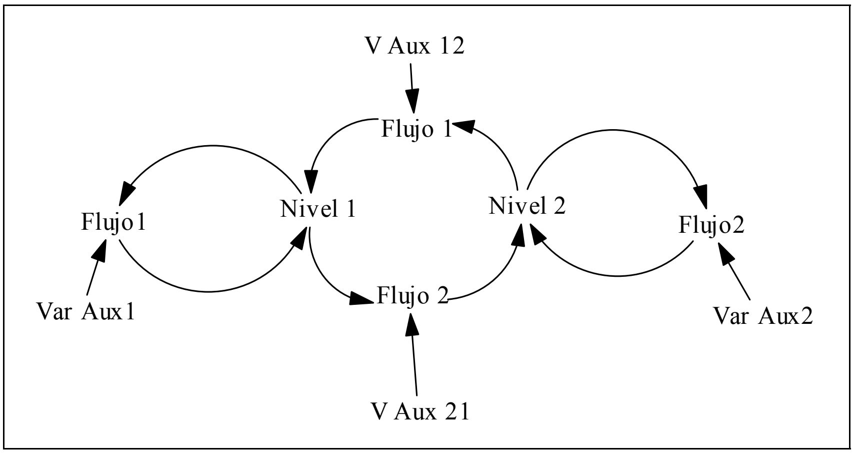
UN = IF THEN ELSE (Pob.Monos ≤ Pob.Normal, 1, 1+(0.1/10) * (Pob.Monos - Pob.Normal))

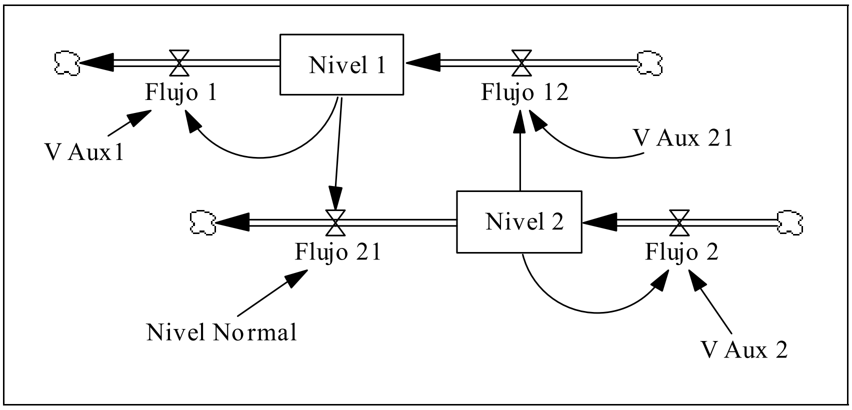


ESTRUCTURA GENÉRICA DE SEGUNDO ORDEN

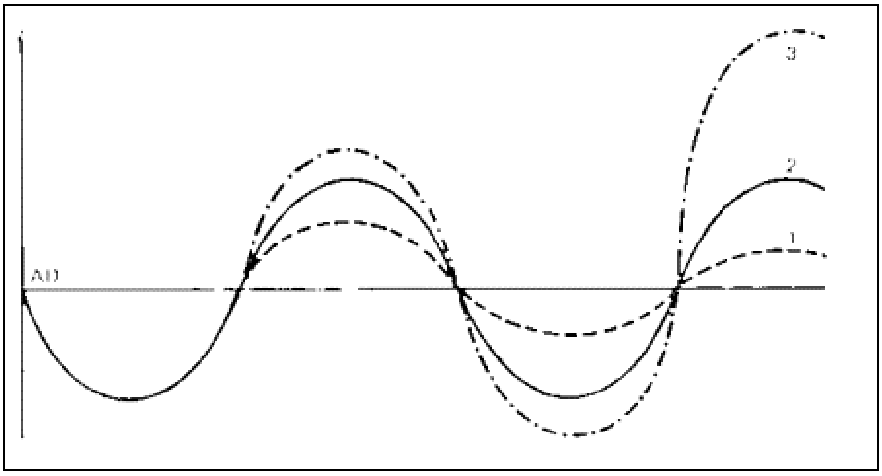
Una estructura de segundo orden se caracteriza por estar compuesta de 2 niveles. Ambos niveles deberán relacionarse entres si, no de manera directa si no por medio de flujos asociativos.

a) **Sistema con comportamiento Oscilatorio.-** Aquellos sistemas que se encuentran inmersos en un máximo de 3 bucles de retroalimentación siendo uno el principal y los otros 2 secundarios presentara comportamiento oscilatorio si el bucle principal une a los 2 niveles y es de retroalimentación negativa adicionalmente podemos establecer que los bucles secundarios son de presencia optativa y en algunos casos no se encuentran presentes.





El comportamiento oscilatorio puede ser



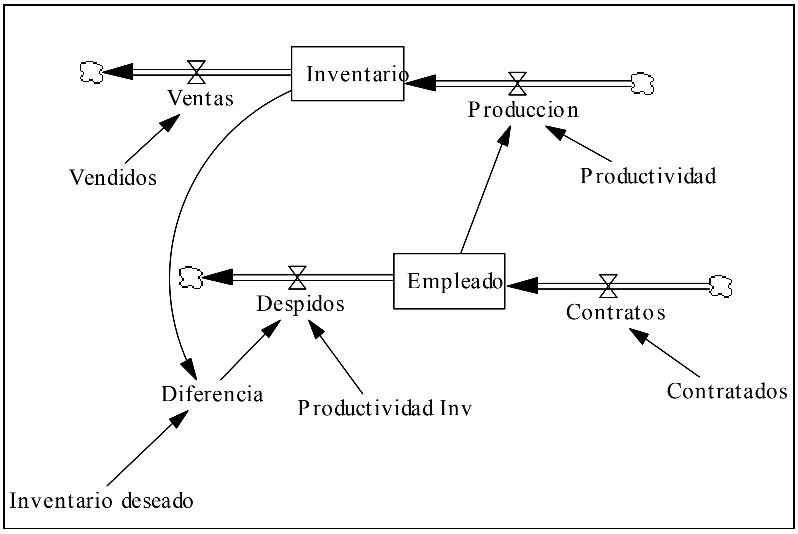
(1)Amortiguadas, (2) Mantenidas y (3) Crecientes.

A consecuencia directa de la presencia opcional de los bucles secundarios y del hecho de que los flujos de asociación pueden ser de entrada o de salida, pero una en contra posición del otro, no se pueden establecer ecuaciones del modelo únicas y generales se deberán hallar dichas ecuaciones para cada caso particular.

Ejemplo:
Una industria establece una política laboral para empleados eventuales basándose en el inventario de sus productos fabricados por los empleados eventuales.

Cada empleado en la industria contribuye en la construcción de ¼ del producto final por mes la empresa a establecido que por mes se deben vender 50 de los productos elaborados por los empleados eventuales, adicionalmente de acuerdo a cambios sindicales se deberán contratar 30 empleados eventuales.

La cantidad de despidos mensuales se definirá de acuerdo al exceso de producción existente en inventario residual, la empresa establece que necesita como máximo un inventario deseado de 20 productos actualmente en inventario existen 35 productos y se encuentren en la empresa 190 empleados eventuales contratados ¿Cuál será el comportamiento de la cantidad de empleados en el inventario de productos?



Dt = mes
Inventario (0) = 35
Empleados (0) = 190
Inventario (t) = Inventario (t-1) + (producción (t) – ventas (t))
= Inventario (0) + producción (t) – Ventas (t) dt
Ventas (t) = Vendidos; vendidos = 50
Producción (t) = Productividad * Empleados (t -1)
Empleados (t) = empleados (t -1) + (contratos (t) – Despidos (t))
Contratos (t) = Contratos; contratos = 30
Despidos (t) = Productividad Inv * Diferencia (t)
Diferencia (t) = Inventario (t) – Inv deseado
Inv Deseado = 20

COMPLEJIDAD DE SISTEMAS DINÁMICOS Y ESTRUCTURAS GENÉRICAS.

Dependiendo de la frontera para el sistema que esta estudiando o del tipo de estudio que se realiza un sistema dinámico puede estar compuesta por 1,2 o muchísimos mas niveles.
Partiendo del principio de emergencia de la teoría general de sistemas podemos dividir el análisis y diseño de nuestro sistema y modelo en componentes más pequeño o subsistemas con identidad propia hasta llegar a obtener una representación elemental que se pueda asociar con una estructura genérica.

La principal dificultad para proseguir con el estudio se presenta para integrar las estructuras genéricas en un solo modelo de tal manera que sea si la interacción entre las estructuras genéricas individuales esto debido a que el análisis matemático crece en complejidad a medida que se integra las estructuras para subsanar este problema se recurre al uso de herramientas de software que facilite el análisis del comportamiento o los cálculos matemáticos y estadísticos.

Visión general del uso de dinámica de sistemas. Como hemos mencionado la dinámica de sistemas es una herramienta utilizada en diferentes áreas y sustentada en la construcción de modelos, el principal enfoque es generalizado en función a un proceso de toma de decisiones sustentando las decisiones en la información generada en el modelo y en acciones sobre los parámetros del modelo que presentan el curso de acción que se debe seguir.

Sistema dinámico Discreto y Estocástico

SISTEMA

De acuerdo a la Teoría General de Sistemas, tres componentes son los que definen a un sistema

SISTEMA {
- Orgánico (Estructura + relación)
- Funcional (Comportamiento + Objetivo)
- Genético (Evolución en el tiempo)

La relación que tiene el componente de cambio o genético da lugar a la clasificación de los sistemas en sistemas Estáticos y sistemas Dinámicos

Sistemas Estáticos

El componente genético de su definición NO depende del (t) tiempo, en consecuencia el sistema no cambia, y por lo cual los componentes orgánico y funcional son invariantes en el transcurso del tiempo.

Ejemplo:
Un sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + 2 = 0 \\ 6x + 6y - 2 = 3 \\ x - 2y + 2 = 1 \end{array}\right\}$$

Sistemas Dinámicos

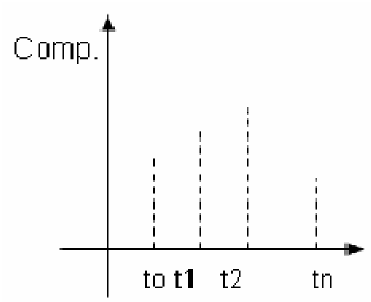
El componente genético de su definición depende del (t) tiempo, haciendo variar los componentes orgánico y funcional.

Ejemplo:
Los circuitos electrónicos

Sistema en Tiempo Discreto

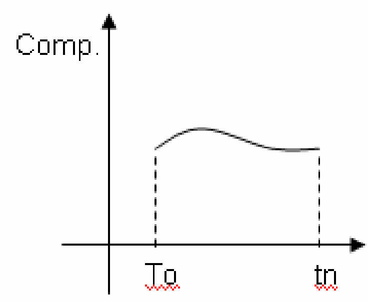
Sea una secuencia {to, t1, t2, t3, … , tn}
Discreto de tiempo
(Instantes puntuales en el tiempo)

Un sistema se encuentra estudiando en tiempo discreto cuando se analiza su comportamiento orgánico funcional únicamente en los tiempos puntuales en una secuencia discreta de tiempo, al analizar el comportamiento no se considera como evoluciona el comportamiento en los intervalos de tiempo.



Sistema en tiempo Continuo

Intervalo de tiempo [to , tn]
Un sistema en tiempo continuo es estudiado tanto en organización como función en cada uno de los posibles momentos pertenecientes a un intervalo de tiempo.



Sistemas Determinísticos

Los elementos estructurales de un sistema se pueden asociar con variables, dichas variables se denominarán Variables de Estado. El valor de estas variables en los sistemas dinámicos cambia con el tiempo, como consecuencia de la interacción de los elementos. El comportamiento vendrá dado por el conjunto de trayectorias descritas por los valores que asumen las variables de estado describiendo lo acontecido con el sistema en el transcurso del tiempo.

$$\text{Sistema} \leftarrow \underbrace{x, y}_{\text{Variables de estado}}$$

Si un sistema esta completamente descrito estructuralmente por una variable entonces el sistema es denominado de una dimensión

S: x (sistema de una dimensión)

Si el sistema es estático el valor de x es constante sin importar que transcurra el tiempo.
Si el sistema es dinámico el valor de x varia en un intervalo dependiente del tiempo

[x0, x1,x2,…, xn] para [t0, t1,t2,…, tn] entonces X = variable

Para saber que ocurrirá con el sistema en el futro (hallar X1) a partir de un punto conocido (Xo) se debe emplear lo que se denomina Función de Evolución. Es así que:

Para el tiempo to

X: Xo

Para el tiempo t1

X: X1 = F (Xo)

Para el tiempo t1

X: X2 = F (X1, X0)

Para el tiempo tn

X: Xn = F (Xn-1, Xn-2,…, Xo)

El caso más sencillo de la función de evolución es:

Xn = F (Xn-1)

Si el sistema es de dimensión dos, dos variables de estado lo describen estructuralmente

Sistema: x , y

x, y :	(xo, yo)	(x1, y1)	(x2, y2) …….	(xn, yn)
	to	t1	t2 ……..	tn

La función de evolución más simple para este caso será

(Xn, Yn) = F (Xn-1, Yn-1)

Si halla una relación tal que Y = g (x), definiendo las relaciones u organización del sistema a nivel estructural, logramos simplificar la función de evolución:

Para el tiempo to

X: Xo, g(Xo)

Para el tiempo t1

X: $X1= F(Xo), g(X1)$

Para el tiempo tn

X: $Xn= F(Xn-1), g(Xn)$

Lo que implicaría solo estudiar una función de evolución dependiente de X

$$Xn = F (Xn-1)$$

Lo importante en el estudio de sistemas determinísticos es hallar o definir la función de evolución ya sea esta una función de variable real o sea una función de variable vectorial.

Al observar la realidad se podrán determinar las variables de estado y un conjunto de observaciones discretas que describan el comportamiento ya sea empleando modelos pre-establecidos o métodos numéricos se podrá hallar la función de evolución.

X: [x0, x1,x2, x3, x4]

Y	X
X1	X0
X2	X1
X3	X2
Xn	Xn-1

Hallando $Y=F(X)$ que resultaría siendo $Xn= F(Xn-1)$

Para simplificar el estudio de un sistema dinámico una vez que se tiene la función de evolución se procura identificar dos casos específicos en el dominio de la función.

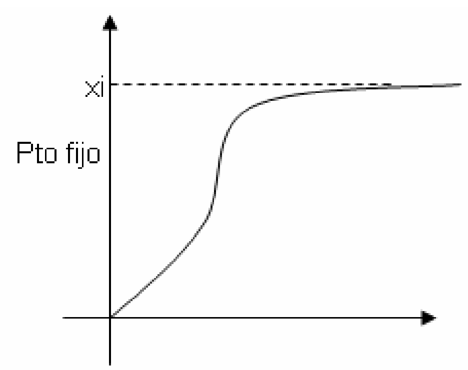
i) Puntos Fijos

Sea sistema: x

Xi es un punto fijo

$$Xi = F(Xi)$$

Los puntos fijos para una función de evolución de un determinado sistema representa el hecho de que el sistema haya entrado en un equilibrio o un estado que nunca va hacer abandonado.



Para hallar los puntos fijos se puede de operar matemáticamente si se tiene la función de evolución si esta no es compleja, en caso contrario se puede emplear otros métodos uno de los mas conocidos es el método grafico denominado diagrama de telaraña.

ii) Puntos Periódicos

Sea el sistema: X de una dimensión y una secuencia de estado se cumple.

$$\left.\begin{array}{l} X1= f(X0) \\ X2= f(X1) \\ Xn= f(Xn - 1) \\ Xo= f(Xn) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} X0=F^n(X0) \\ X0= f(f(f\ldots(f(X0)))) \\ \text{n-veces} \end{array}$$

En consecuencia {X0, X1,…, Xn} son puntos periódicos de f y del mismo sistema.
Una función que cumpla con las anteriores características se considera como una función de evolución con un periodo de grado n.

La principal ventaja de determinar los puntos periódicos para el comportamiento de un sistema es que el estudio del sistema en transcurso del tiempo se reducirá a simplemente estudiar el conjunto de sub puntos periódicos. Sin embargo no todos los sistemas y funciones de evolución tendrán puntos periódicos.

Sistemas o procesos estocásticos (Dinámicos)

Un sistema dinámico estocástico, también conocido como proceso estocástico, es un sistema cuyo comportamiento en el tiempo evoluciona al azar. Si el sistema en un momento determinado se muestra en un estado, en el próximo instante existe la probabilidad de que el sistema se encuentre en varios posibles estados.

Para realizar el estudio de este tipo de sistemas se emplean modelos probabilísticas, en los cuales los sucesos a estudiar, son los hechos de que un sistema en un instante en el tiempo se encuentra en un determinado estado.

Ejemplo:
Un jugador tiene un capital de 200 $us y participa en un juego de azar donde debe apostar 100 $us por participación. Si la probabilidad de perder es 1-p; representar como evoluciona en el tiempo la cantidad de dinero que tiene el jugador.

Dinero / Tiempo	0	100	200	300	400
to	0	0	1	0	0
t1	0	1 – p	0	p	0
t2	$(1-p)^2$	0	2 p (1-p)	0	p^2

to, Xo = 200 → t1: p(X1 = 100 | Xo=200) = 1 – p
t2: p(X2 = 200 | X1=100, Xo = 200) = 2 p (1 - p)
t2 : p(X2 = 0 | X1=100, X0= 200) = $(1 - p)^2$

Probabilidad de transición de estados

Los sistemas determinísticos para representar como evoluciona su comportamiento en el tiempo emplean lo que se denomina función de evolución, en cambio los sistemas estocásticos emplean distribuciones de probabilidad, en consecuencia cada estado en un tiempo determinado tendrá una probabilidad de transición a un siguiente estado acorde con dicha distribución, denominándose a esta probabilidad de transición de estado.

El caso más sencillo de la probabilidad de transición es:

Para el tiempo tn:

$$p(Xn = i_n) = p(Xn = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1})$$

Procesos estocásticos

Se trata de estudiar una colección de variables aleatorias, o al menos una, asociadas a un conjunto de índices de tiempo T,

$$\{Xt, t \in T\}.$$

Puede tratarse de un conjunto de instantes de tiempo o de un conjunto de posiciones en el plano o en el espacio.
Un proceso aleatorio puede verse como una función aplicada sobre el espacio producto de un espacio probabilístico y el conjunto de índices en el tiempo y que toma valores en un conjunto imagen E, en general será R, R^n o C:

$$W: X, T \Rightarrow E$$
$$W: Xn = i_n, t_n \Rightarrow Xtn\,(Xn = i_n) = p(Xn = i_n) \in R$$

De esta forma si se fija un índice t, entonces tenemos una variable aleatoria Xt: X → E que a cada suceso $Xn= i_n$ le asocia un resultado Xtn $(Xn=i_n) \in E$, siendo esta una distribución de probabilidades para una variable aleatoria.

Para ejemplificar un proceso estocástico, dada la complejidad de los mismos, estudiaremos a continuación un caso específico, que bajo ciertas condiciones preestablecidas se simplifica y será más comprensible.

Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son un caso específico de sistemas estocásticos de tiempo discreto, para éste caso específico se debe cumplir las siguientes condiciones al comportamiento de los estados.

i) Sea una secuencia de tiempos discretos {t0,t1,..,tn}

$P(X_{tn} = in \mid X_{tn-1} = i_{n-1},\ldots,X_{tn} = io)= P(X_{tn} = in \mid X_{tn-1} = i_{n-1})$

Si se conoce el presente, el futuro ya no dependerá del pasado.

ii) Hipótesis de estabilidad

$P(X_{tn} = i \mid X_{tn-1} = j) = p_{ij} = ctte$ independiente del tiempo

Una cadena de Markov puede ser representada de manera grafica o matricial. Para trabajar con la representación matricial el sistema deberá tener un conjunto de estados finito numerable.

Ejemplo:

Un jugador participa en un juego de bacará (siete), inicialmente cuenta con un capital de 300 $us, su meta para dejar de jugar es duplicar el capital o perderlo todo en un intento. Estudiar el comportamiento de la cantidad de dinero del jugador en el tiempo.

i) Identificamos los estados del sistema.

Finito numerable = {0, 100, 200, 300, 400, 500, 600}$us

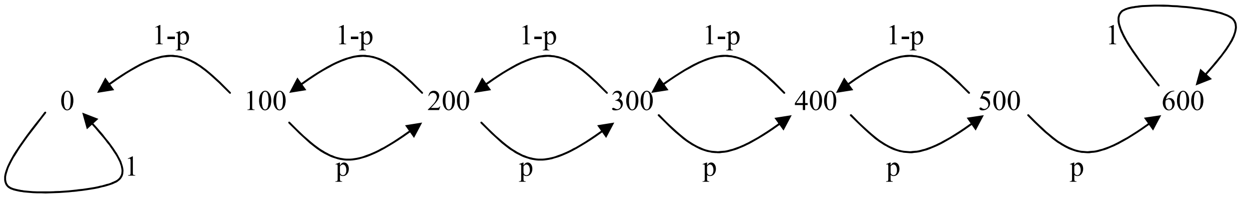
ii) Identificamos el modelo probabilístico del sistema en el tiempo

Modelo Bernoulli (0: perder; 1: ganar)

$$\text{Bernoulli}(x)\begin{cases} X = 0 & p \\ X = 1 & 1 - p \end{cases}$$

El sistema cambia de estado según el modelo Bernoulli, donde **p** es la probabilidad de perder en el juego Bacará; y **1 – p** es la probabilidad de ganar.

Representación Grafica



i) $p(X_{t+1} = 400 | X_t = 300) = 1 - p$; $p(X_{t+1}=200 | X_t= 300) = p$

ii) $1 - p$ ^ p no cambian respecto ti

Para completar el modelo debemos hallar el valor de "p"

S: {Ganar, Perder}

P(Ganar) = 1 – p
P(perder) = p

Se obtiene una suma de siete en 2 dados

S: Lanzar 2 dados

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)
: : : : :
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)

#S = 36

P(x,y) = Sucesos independientes de tal forma que:
P(1,3) = p(1) p (3) = 1/6 x 1/6 = 1/36

Considerando un solo dado
S_1 = {1, 2, 3, 4, 5, 6} cada cara tiene la misma probabilidad.

i) P(a) < 1
ii) P(S)=1 entonces $P(A_i)$= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)
X + X + X + X + X + X

6x = 1

$X = 1/6$ entonces $P(1)= P(2)= P(3)= P(4)= P(5)= P(6)=X = 1/6$

Evento
Ganar = {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}

P (Ganar) = P(1,6)+ P(2,5)+P (3,4)+ P(4,3)+ P(5,2)+ P(6,1)
= 6/36=1/6

P(Perder) = 1- 1/6 = 5/6 = p

Matriz de Probabilidad de transición (Cambio $t \Rightarrow t_{+1}$)

XT \ Xt_{+1}	0	100	200	300	400	500	600
0	1	0	0	0	0	0	0
100	5/6	0	1/6	0	0	0	0
200	0	5/6	0	1/6	0	0	0
300	0	0	5/6	0	1/6	0	0
400	0	0	0	5/6	0	1/6	0
500	0	0	0	0	5/6	0	1/6
600	0	0	0	0	0	0	1

Para trabajar con una cadena de Markov se emplea un vector fila de probabilidades iniciales (t_i) multiplicando el vector por la matriz de probabilidad de transición (P) se obtiene ($V\ t_{i+1}$)

En nuestro ejemplo:

To	Vo = [0	0	0	1	0	0	0]
T1	V1 = Vo x P						
	V1 = [0	0	5/6	0	5/6	0	0]
T2	V2 = V1 x P						
	V2 = [0	25/36	0	10/36	0	1/36	0]

Si se desea establecer una transición mayor se deberá:
To Vo
Tn $Vn= Vo \times P^n$

To $Vo \rightarrow T2$ V2

$V1= Vo \times P$
$V2= V1 \times P = (Vo \times P) \times P = Vo\,(P)^2$

Características de la Matriz de Probabilidades de transición.
Para una cadena de Markov la "matriz de probabilidades de transición" presenta un conjunto de distribuciones de probabilidad cada una de estas expresa las probabilidades de cambiar de un estado Xi a una Xj en un salto en el tiempo ($t \rightarrow t+1$).

En "P" cada fila es una distribución de probabilidad por la cual los elementos de cada fila suman en total "1".

Cada elemento adicionalmente es una probabilidad.

Ejemplo:

Dos niños Adrian y Boris juegan a cara y cruz con el dinero en unidades de 1Bs que cada uno tiene. Si A cuenta con 2 bolivianos y B tiene 3 Bs; representar la cantidad de dinero de A con una cadena de Harkov.

Estados del proceso Estocástico = {5, 4, 3, 2, 1, 0}
¿Cómo cambia el sistema de estados?

$$\text{Modelo Bernulli } (X) = \begin{cases} X=0 & ;P \\ X=1 & ;1-P \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \text{Ganar} = 1 \\ \text{Perder} = 0 \end{bmatrix}$$

$P(x=0) = P(\text{perder}) = 0.5 = \frac{1}{2} = P$
$P(X = 1) = 1 - P = 1 - 0.5 = 0.5$

Xi \ Xj	0	1	2	3	4	5	
0	1	0	0	0	0	0	∑fila = 1
1	0.5	0	0.5	0	0	0	∑fila = 1
2	0	0.5	0	0.5	0	0	∑fila = 1
3	0	0	0.5	0	0.5	0	∑fila = 1
4	0	0	0	0.5	0	0.5	∑fila = 1
5	0	0	0	0	0	1	∑fila = 1

Características de los estados de la matriz de los estados de probabilidad.

Como sabemos la matriz de probabilidad de transición representa la probabilidad de cambiar desde un estado inicial hasta un estado siguiente y, si empleamos la matriz P será en un instante en el tiempo, se emplea P^2 luego de 2 saltos en el tiempo, y así sucesivamente. Si desde i se puede llegar a un estado **j** en algún instante en el tiempo se dirá que **j** es accesible desde **i**, siempre y cuando la probabilidad pij>0 de alguna matriz. P^n

$$P \quad \begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{ccc} x_0 & x_1 & x_2 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$X_0 \rightarrow X_1$ $\quad \left.\begin{array}{l} \text{Si } \; p_{01} > 0 \\ \text{No } \; p_{01} = 0 \end{array}\right\} P_{01} \in P^n$

Los estados de una cadena de Markov también pueden ser comunicantes, absorbentes, transitorios y recurrentes.

a) Estado Accesible

$i \rightarrow j$: j es accesible desde i $\quad$ Ssi $\; p_{ij} \in P^n \,/\, p_{ij} > 0$

$i \not\rightarrow j$: j no es accesible desde i $\quad$ Ssi $\; p_{ij} \in P^n \,/\, p_{ij} = 0$

b) estado comunicantes

$i \leftrightarrow j$: i se comunica con j
j se comunica con i

Ssi $i \rightarrow j \quad \wedge \quad j \rightarrow i$

c) Estado Absorbente
Es un estado del cual no se puede salir una vez que se ingresa a i es absorbente Ssi $p_{i\,j} = 1$

d) Estado Transitorio
Es aquel estado que una vez de salida no existe la probabilidad de volver a el

e) Estado Recurrente
Es aquel estado, que una vez se sale de el, existe la forma de regresar al mismo después de n saltos en el tiempo.

i es periódico — n es el periodo del estado
Ssi $i \rightarrow i$ para P^n

Ejemplo:

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ b & 0.3 & 0 & 0.7 & 0 \\ c & 0.3 & 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ d & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{array}$$

¿$a \rightarrow d$?

	a	b	c	d
a	0.3	0.5	0.5	0.15
b	0.21	0.22	0.36	0.21
c	0.27	0.33	0.31	0.09
d	0.15	0.25	0.6	0

no es accesible en P

Para P^2 si es accesible

Pad = 0.15> 0 es accesible

¿$a \leftrightarrow b$?

i) ¿$a \rightarrow b$? $\quad p_{ab} = 0.5$

ii) ¿$b \rightarrow a$? $\quad p_{ba} = 0.3$

a se comunica con b

Para la siguiente cadena de Markov, ¿Qué estados son absorbentes?

P

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x_0	1	0	0	0	0
x_1	0.5	0.25	0.5	0.25	0
x_2	0.25	0	0.5	0	0.25
x_3	0	0.25	0	0.25	0.5
x_4	0	0	0	0	1

P^2

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x_0	1	0	0	0	0
x_1	0.625	0	0.25	0	0.125
x_2	0.25	0.25	0.5	0.25	0.25
x_3	0.125	0	0.25	0	0.025
x_4	0	0	0	0	1

$X_0 \quad P_{x0x0} = 1$
$X_4 \quad P_{x4x4} = 1$

Una matriz de probabilidades de transición se denomina aperiódica cuando todos sus estados son recurrentes con un periodo igual a 1, esto ocurrirá cuando la matriz de probabilidad de transición este compuesta por probabilidades todas mayores que cero.
Una cadena de Markov que tenga una matriz de probabilidad de transición aperiódica tendrá una distribución límite.
Una matriz será clasificada como periódica si tiene estados recurrentes, con un periodo mayor a 1, y el periodo de la matriz será el máximo común divisor de los periodos de los estados recurrentes existentes. Las matrices periódicas tendrán tantas distribuciones límite como el periodo que tienen.

Distribución Límite

$$\lim_{n \to \infty} P = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

La distribución límite es un estado de equilibrio que alcanza la cadena de Markov y define una única distribución de probabilidad para el cambio de estados, una cadena de Markov de distribución límite podrá trabajar con dicha distribución para lapsos muy largos de tiempo lo que facilita la toma de decisiones o de inferencia probabilística.

Simulación de Montecarlo

Una de las características de los sistemas estocásticos es su comportamiento aleatorio, que se refleja mediante la posibilidad de realizar cambios de estados aleatorios, eso quiere decir que si el sistema se encuentra en estado Xo existen varios posibles estados siguientes.

Esa característica obliga a emplear métodos de simulación que imiten el comportamiento aleatorio del sistema estocástico. La simulación de Montecarlo es uno de esos métodos, fue desarrollado a finales de la década de los 30 y sustenta su trabajo en el uso de números aleatorios recibió el denominativo de Montecarlo pues originalmente se emplea una ruleta para la generación de los números aleatorios y en Montecarlo se encontraba mas grande de casino de la época, famoso por sus juegos de ruleta. Uno de los más destacados usos que se les dio a esta simulación fue la simulación del comportamiento aleatorio de las trayectorias de los electrones al momento de inventar la bomba atómica.

La simulación de Montecarlo emplea 2 elementos fundamentales para sus fines el primer elemento son las distribuciones de probabilidad, empleados para la construcción de los denominados intervalos de Montecarlo o de confianza, el segundo elemento es emplear los números aleatorios on utilizados de manera conjunta con una función inversa a la pertenencia a un intervalo para determinar los estados que compondrán el comportamiento aleatorio del sistema estocástico.

Los pasos a seguir en una simulación de Montecarlo son los siguientes:

1. Se determina los estados del sistema estocástico Xi
2. Se define una distribución de probabilidad para dichos estados
3. Para cada estado se define un único intervalo de confianza Ix_i
4. Se generan números aleatorios y se determina su pertenencia de cada de Ix_i
5. Se establece Xi = F^{-1} (IXi) para cada numero aleatorio se define el estado correspondiente

En consecuencia por cada número aleatorio se define un estado

Ejemplo:

Una fábrica de electrónica realiza el estudio del compartimiento de las ventas de un de sus productos. Considerando las últimas 50 ventas. Se asume que el comportamiento de dichas ventas no presento ninguna tendencia y es de carácter aleatorio.

Tabla de ventas

(100, 120, 130, 140, 140, 100, 130, 120)

Xo	Ni	Fi	fi	Fi	Intervalo	
100	8	8/50	0,16	0,16	[0	0,16>
120	12	12/50	0,24	0,4	[0,16	0,40>
130	9	9/50	0,18	0,58	[0,40	0,58>
140	13	13/50	0,26	0,84	[0,58	0,84>
150	8	8/50	0,16	1	[0,84	1]
	50		1			

Generar 10 números aleatorios

Cos (6)	Nº Aleat.	Ixi	$Xi=F^{-1}$ (Ixi)
1	0,809	I4	140
2	0,914	I5	150
3	0,846	I5	150
4	0,538	I3	130
5	0,154	I1	100
6	0,016	I1	100
7	0,231	I2	120
8	0,838	I4	140
9	0,528	I3	130
10	0,26	I2	120

Se pueden tomar decisiones basándose en estadísticas, como la media o la moda. Para nuestro ejemplo es posible hallar:

Media = 128
Moda = 130, 140,150

La simulación de Montecarlo puede ser empleada de manera conjunta con las cadenas de Markov para simular comportamientos específicos de este tipo de sistemas estocásticos. Para ello se realizan de manera simultanea 2 o mas simulaciones de Montecarlo las cuales se regirán bajo los siguientes aspectos.

1. Se deberá construir un conjunto de intervalos de confianza para la distribución inicial de la cadena de Markov: Vo.
2. Considerando que cada Fila de la matriz de probabilidades de transición, que es una distribución de probabilidades, se deberá construir para cada una de ellas un conjunto de intervalos de Montecarlo.
3. Se generan números aleatorios para definir el estado inicial trabajando con el primer conjunto de intervalos de Vo.
4. De acuerdo al resultado obtenido se selecciona la fila correspondiente al estado establecido en el punto anterior, se genera un segundo número aleatorio y se realiza la simulación de Montecarlo con los intervalos construidos en base a la distribución de la fila relacionada.
5. Se repetirá el proceso si corresponde o se empleará el resultado del punto anterior si la simulación así los exige.

Ejemplo:

En un sistema de comunicaciones se envía mensajes compuestos por 0 y 1 cuya longitud es de una palabra, la probabilidad de que el mensaje un bit sea cero es del 0.48. Dicho sistema de comunicación esta compuesto por 4 terminales de repetición idénticas en las cuales la probabilidad de error es del 3%. Empleando la simulación de Montecarlo determinar la proporción de confiabilidad del sistema para 10 mensajes.

Origen ➔ P ➔ P ➔ P ➔ P ➔ destino

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ Xo \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.97 & 0.03 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix} \end{array} \quad P$$

(Xi: columnas; Xo: filas)

Para el sistema de comunicación completo la Matriz de probabilidades de transición será P^4

$P^4 =$

$$\begin{bmatrix} 0.894 & 0.106 \\ 0.177 & 0.823 \end{bmatrix}$$

Nuestro mensaje será un Word = 16 bits, donde cada bit tendrá la siguiente probabilidad

	0	1	
Vo= [	0.48	0.52	]

Usar la simulación de Montecarlo + la cadena de Markov

1. Intervalo de Montecarlo

Xi	fi	Fi	Ii
0	0.48	0.48	[0 - 048]
1	0.52	1	[0.48 1]

2. Para Xo = 0

Xi	fi	Fi	Ii
0	0.894	0.894	[0 - 0, 894]
1	0.106	1	[0.894 - 1]

Para Xo = 1

Xi	fi	Fi	Ii
0	0.177	0.177	[0 - 0,177]
1	0.823	1	[0.177 - 1]

Se transmite un mensaje

Bit	#aleat1	Bit trans	#aleat2	Bit Recib
0	0.819	1	0.769	1
1	0.494	1	0.574	1
2	0.890	1	0.540	1
3	0.164	0	0.884	0
4	0.006	0	0.796	0
5	0.666	1	0.658	1
6	0.269	0	0.827	0
7	0.783	1	0.626	1
8	0.498	1	0.591	1
9	0.089	0	0.716	0
10	0.638	1	0.621	1
11	0.821	1	0.398	1
12	0.219	0	0.303	0
13	0.251	0	0.458	0
14	0.436	0	0.964	1
15	0.287	1	0.437	0

Por el bit 14 el mensaje es transmitido erróneamente. Para nuestro ejemplo debemos repetir el proceso otras 9 veces mas, y definir las proporciones de éxito y de fracaso.

Identificación de Sistemas

1. Modelado frente a Identificación.

El primer objetivo a la hora de realizar la simulación de un sistema es la obtención de un modelo matemático que describa adecuadamente su comportamiento. Esta tarea es denominada *modelado*, y puede ser realizada mediante dos metodologías diferentes: una que se basa en la extracción de las relaciones de las variables a partir de datos experimentales, denominada *identificación*, y otra metodología que se fundamenta en la aplicación de las leyes de la física para la obtención del modelo. Esta última metodología recibe el nombre de *modelado*, término que a veces también es utilizado para hacer referencia al proceso de obtención de un modelo sin distinción de la metodología aplicada, como ya se hizo al principio de este párrafo.

1.1. Descripción de la metodología de *identificación*.

La metodología de *modelado* se caracteriza por generar conjuntos de ecuaciones diferenciales y/o algebraicas, normalmente no lineales, que se obtienen a partir de un estudio analítico del sistema basado en una serie de hipótesis sobre dicho sistema y el uso de leyes de comportamiento físico. Los modelos generados mediante esta metodología reciben el nombre de modelos *teóricos* o *físicos,* o también *analíticos*.
La metodología de *identificación* se caracteriza por considerar el sistema como una caja negra, sin hacer ninguna hipótesis ni tener en cuenta los mecanismos internos de funcionamiento del sistema, y se basa en medidas experimentales para deducir las relaciones entrada-salida. Estos modelos son denominados modelos *de caja negra* o *empíricos*.

Las etapas de la metodología de *identificación* se detallan a continuación:

1. Obtención de datos de entrada-salida. Para ello se debe excitar el sistema mediante la aplicación de varias señales de entrada y registrar la evolución de sus entradas y salidas durante un intervalo de tiempo.

2. Tratamiento previo de los datos registrados. Los datos registrados están generalmente acompañados de ruidos indeseados u otro tipo de imperfecciones que puede ser necesario corregir antes de iniciar la identificación del modelo. Se trata, por tanto, de *preparar* los datos para facilitar y mejorar el proceso de identificación.

3. Elección de la estructura del modelo. En un modelo matemático se puede distinguir una estructura, por ejemplo $\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + bu(t)$, y los parámetros del modelo (a=1, b=2). Se debe determinar la estructura deseada para el modelo que se pretende obtener. Esta elección se basa, entre otros, en un análisis de los datos experimentales, en un conocimiento previo del sistema y en el tipo de modelo que se quiere obtener. Por ejemplo, si se quiere obtener un modelo estacionario de un sistema y los datos experimentales muestran la existencia de una relación lineal, una estructura adecuada es $y = ax + b$, siendo x la variable de entrada e y la variable de salida.

4. Obtención de los parámetros del modelo. A continuación se procede a la estimación de los parámetros de la estructura que mejor ajustan la respuesta del modelo a los datos de entrada-salida obtenidos experimentalmente. El criterio de ajuste de parámetros se elige en función de la clase de modelo a identificar y de los datos de los que se dispongan. Un criterio de ajuste muy frecuente es el de mínimos cuadrados, que consiste en obtener los valores de los parámetros que minimizan la suma de los errores al cuadrado.

5. Validación del modelo. El último paso consiste en determinar si el modelo obtenido satisface el grado de exactitud requerido para la aplicación en cuestión. Si se llega a la conclusión de que el modelo no es válido, se deben revisar las etapas anteriores en busca de las causas de error, y deberá repetirse el proceso de identificación desde el punto correspondiente. Por tanto, el proceso de *identificación* es un proceso iterativo.

1.2. Comparación de ambas metodologías.

En este apartado se efectúa una comparación entre las dos metodologías y se indican las ventajas y los inconvenientes de cada una. Se analizan los siguientes aspectos:

- **Dificultad en la obtención del modelo**: el *modelado* puede ser una tarea larga que requiere un conocimiento preciso del sistema que se pretende modelar, además de experiencia en la tarea de modelado. Por ello, no es aplicable a sistemas muy complejos. La *identificación* suele ser una tarea más sencilla. Basta con obtener un conjunto de datos experimentales que describan adecuadamente el comportamiento de un sistema y tratar de ajustar una estructura matemática a estos dados. En ocasiones, este proceso presenta gran dificultad, pero en términos generales suele ser más sencillo que el *modelado*.

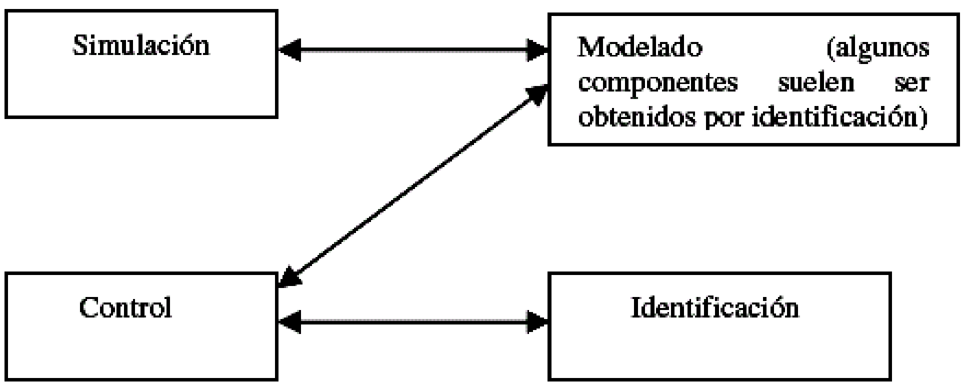
- **Rango de validez del modelo**: el proceso de *modelado* genera modelos con un mayor rango de validez, más generales, porque lleva incorporados los mecanismos internos del sistema. Los modelos obtenidos por *identificación* sólo son válidos en las condiciones en las que se tomaron los datos experimentales, y para valores de las variables comprendidos en los intervalos de variación de éstas en los experimentos.

- **Significado de parámetros**: en la *identificación* es difícil dar significado a los parámetros del modelo. En el *modelado* no ocurre esto, pero suele ser necesario estimar los parámetros físicos del sistema a partir de medidas experimentales.

Como conclusión se deduce que lo ideal es recurrir a una mezcla de ambos métodos para obtener el modelo final, puesto que el uso de datos reales para identificar los parámetros del proceso provee a éste de una gran exactitud y el proceso de identificación se ve tanto más facilitado cuanto mayor sea el conocimiento sobre las leyes físicas y químicas que rigen el proceso. La combinación de los dos métodos permite el cumplimiento de dos aspectos importantes cuando se realiza un modelo:
- *El esfuerzo de modelado debe reflejar el uso que se pretende dar.*
- *No debe estimarse lo que ya se conoce.*

Los modelos generados tras combinar ambas metodologías se denominan modelos *de caja gris*.

Entre las aplicaciones de un modelo se encuentran la simulación y el diseño de sistemas de control. En el siguiente esquema se indica la aplicación más adecuada, entre las dos anteriores, de los modelos generados por las metodologías de *modelado* y de *identificación*.



El *modelado*, al obtener modelos de mayor rango de validez, es más apropiado para la simulación, donde se van a ensayar valores de las variables de entrada en un amplio margen. Como ya se mencionó anteriormente, el *modelado* de un sistema suele estar complementado por la *identificación* de alguno de sus componentes cuando éste es demasiado complejo como para aplicar leyes físicas. Los modelos obtenidos por medio de un proceso de *modelado* también son utilizados para el diseño de sistemas de control.
Los modelos generados mediante *identificación*, válidos sólo en las condiciones en las que se tomaron los datos experimentales, son aplicables al diseño de sistemas de control, ya que el modelo obtenido sólo necesita ser válido en las cercanías del punto de operación donde se pretende controlar el sistema.

2. Identificación.

La metodología de *modelado* permite la generación de modelos más generales que los desarrollados mediante *identificación*, motivo por el cual el *modelado* es empleado para la obtención de modelos para simulación. Sin embargo, debido a las limitaciones del conocimiento actual o a la complejidad involucrada en los sistemas físicos, los modelos generados suelen tener algunas partes con base empírica.
Así, las medidas experimentales se emplean para:

- Estimar el valor de algún parámetro del modelo teórico (Estimación de parámetros).
- Definir alguna relación entre variables que no se conoce teóricamente (*Identificación* de componentes del sistema, también llamados subsistemas).

Resumiendo todo lo comentado en este tema respecto a la metodología de *identificación*, ésta se puede aplicar para:

- Determinar una parte de un modelo teórico (*identificación* de subsistemas). Estos modelos se suelen denominar ***modelos de caja gris***. Siguen siendo adecuados para la simulación ya que, a pesar de estar desarrollados con ayuda de datos experimentales, están generados principalmente por leyes físicas o principios matemáticos, lo cual les permite tener un buen rango de validez.
- Determinar el modelo de un sistema completo. Estos modelos reciben el nombre de ***modelos de caja negra***. Las limitaciones en el rango de validez impuestas por las medidas experimentales hacen desaconsejable el uso de estos modelos en simulación, aunque sí son aplicables al diseño de sistemas de control.

2.1. Técnicas empleadas en la identificación

Existen, en principio, tres diferentes formas de emplear la identificación como método para fines de modelado.

- Realizar experimentos simples para estructurar el modelo del sistema.
- Construir modelos para describir como la salidas dependen de las entradas, sin sustentar el modelo en relaciones físicas que se presume existen en el interior del sistema, los modelos a desarrollar deberán sustentarse en datos experimentales. Empleando para ello el planteamiento de un modelo arbitrario experimental o utilizando alguna estructura genérica planteada para un campo específico (Ej. Dinámica de sistemas)
- Usar un conjunto de datos para determinar parámetros desconocidos en un modelo obtenido a partir d leyes físicas o principios matemáticos.

En consecuencia las técnicas más empleadas en la identificación de sistemas son las siguientes:

Estimación de respuesta transitoria

Consiste en realizar experimentos en el sistema a modelar, en el cual se han determinado variables de entrada y se desea establecer su efecto en el conjunto de variables de salida, o en subsistemas.
Para ello se afectan a las variables de entrada seleccionadas y se estudia la respuesta a este impulso de entrada en el sistema, buscando la siguiente información:

- Que variables se ven afectadas por las entradas en cuestión en el sistema, la influencia de este impulso de entrada se puede graficar mediante diagramas de bloques o diagramas causales, en base a la información obtenida en el experimento.
- Las constantes de tiempo, que nos sirve para definir que relaciones en el modelo pueden ser descritas como estáticas, y que relaciones son dinámicas, definiendo un diferencial de tiempo en el cual se produce la respuesta.
- Las características de las respuesta, de acuerdo a diferentes rangos de entradas se determina el comportamiento de la salida, definiendo si este es oscilatorio, lineal, exponencial u otro.

Análisis de Correlación
En esta técnica se desea describir, de forma matemática como las entradas afectan a las salidas, empleando para ello un conjunto de observaciones experimentales, realizadas mediante la estimación de la respuesta transitoria.
En base a este conjunto de información se puede aplicar técnicas como las siguientes para definir un modelo matemático que defina la correlación de entradas y salidas:

Regresión lineal.
La regresión es un método de análisis de datos procedentes de un sistema que sirve para poner en evidencia las relaciones que existen entre diversas variables. Este método se puede aplicar para obtener las relaciones entre las variables de un sistema completo (modelo de caja negra), o entre las variables de una parte del sistema (subsistema), como ocurre en los modelos de caja gris. En cualquier caso, un problema de regresión se define de la siguiente manera:
Se obtiene un conjunto de muestras de (entrada, salida) o (Xi,Yi) con i=1..n
Se asume que el sistema tiene un comportamiento lineal de tal forma que:

$$Y = aX + b$$

$$b = \frac{n\sum XiYi - \sum Xi \sum Yi}{n\sum Xi^2 - (\sum Xi)^2}$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

Regresión lineal múltiple.
En esta técnica se asume que existe mas de una variable de entrada de tal forma que las observaciones serán (Yi, X_1i, X_2i,........, Xni), dependiendo del número de entradas el proceso varia, pero en esencia se desea obtener una ecuación polinómica lineal de tal forma que Y = a1 X_1i + a2 X_2i+........+an Xni.
De forma manual el proceso es largo y complicado pero existe actualmente software que facilita esta estimación.

Regresión no lineal.
En muchas ocasiones la relación entre los datos es más compleja que una combinación lineal. Se eligen, entonces, funciones no lineales, como potencias, exponenciales, fracciones, etc. Existen dos enfoques para resolver un problema de regresión no lineal:

- Hacer un cambio de variables para transformar el problema en un problema de regresión lineal.
- Resolver el problema no lineal directamente.

Existen muchos métodos de regresión no lineal. Uno de los más usado consiste es resolver de forma iterativa un problema de regresión lineal obtenido mediante linealización del problema de regresión no lineal por medio de la serie de Taylor.
En los casos en los que la relación entre los datos es muy compleja y no es fácil elegir una función para ajustarse a los datos, es bastante útil el empleo de las redes neuronales. Este método es muy adecuado para problemas con múltiples entradas.

Estimación de Funciones de transferencia
En esta técnica se desea hallar la denominada función de transferencia que permita hallar la magnitud de la variable de salida utilizando la variable de entrada y la función de transferencia.
La función de transferencia, relaciona los valores de las variables de salida con los valores de las variables de entrada, por medio de un modelo matemático (formula) tal que:

So = F(S)*Si
En sistemas en los cuales el comportamiento sea complejo, y de manera grafica se pueda definir una relación no lineal, y en algunos casos oscilatoria donde se pueden emplear transformaciones al campo de los números complejos (Transformada de Fourier o Transformada de Laplace) para simplificar el trabajo del calculo de la función de transferencia a relaciones algebraicas.