Tema 2: Autómatas finitos

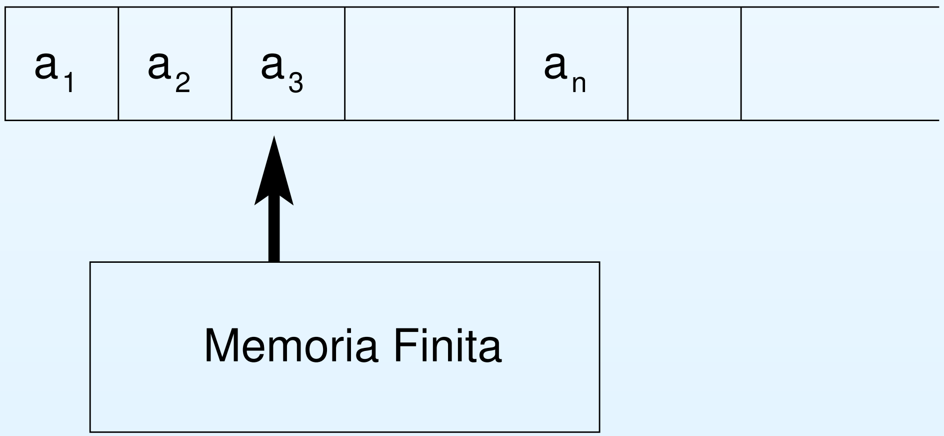
Departamento de Sistemas Informáticos y Computación

Tema 2: Autómatas finitos

- Autómata finito determinista (AFD).
  Formas de representación de un AFD:
  - Diagrama de transiciones.
  - Tabla de transiciones.
- Autómata finito no determinista (AFN).
- Equivalencia AFN - AFD
- Autómata finito no determinista con transiciones vacías (AFλ).
- Equivalencia AFλ - AFN
- Equivalencia Autómata Finito - Gramática Regular

Autómata finito determinista

- Un *autómata finito determinista* es una 5-tupla $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:
  - Q es un conjunto finito de estados
  - Σ es un conjunto finito de símbolos o alfabeto.
  - $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ es una función parcial llamada *función de transición*
  - $q_0 \in Q$ *estado inicial*
  - $F \subseteq Q$ conjunto de *estados finales*

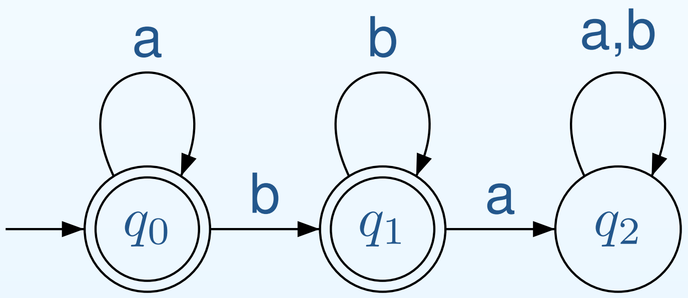


Autómata finito determinista

$$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1\})$$

$$\delta(q_0, a) = q_0 \quad \delta(q_1, a) = q_2 \quad \delta(q_2, a) = q_2$$
$$\delta(q_0, b) = q_1 \quad \delta(q_1, b) = q_1 \quad \delta(q_2, b) = q_2$$

	a	**b**
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_1
q_2	q_2	q_2



Autómata finito determinista

- Extensión de la función de transición a cadenas

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \longrightarrow Q$$

$\forall q \in Q,\ x \in \Sigma^*,\ a \in \Sigma$

  - $\hat{\delta}(q, \lambda) = q$
  - $\hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$

- Lenguaje aceptado por un AFD

$$L(A) = \{x \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, x) \in F\}$$

Autómata finito no determinista

- Un *autómata finito no determinista* es una 5-tupla $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:
  - Q, Σ, $q_0 \in Q$ y $F \subseteq Q$ el mismo conjunto de estados, alfabeto, estado inicial y conjunto de estados finales que en la definición de AFD
  - $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ es una función parcial llamada *función de transición*
- Extensión de δ a cadenas $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$
  $\forall q \in Q$, $x \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$
  - $\hat{\delta}(q, \lambda) = \{q\}$
  - $\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(p, a)$
- Lenguaje aceptado por un AFN:

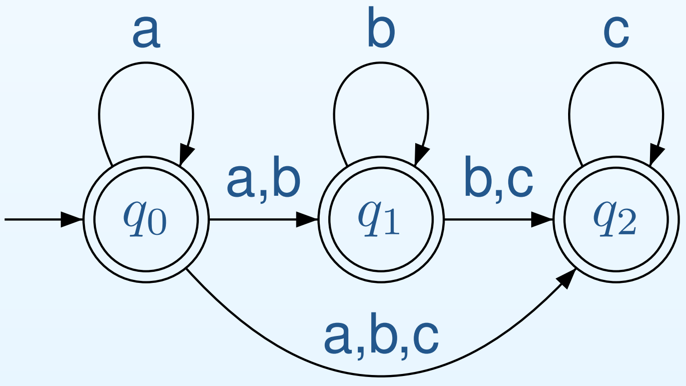
$$L(A) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset\}$$

Autómata finito no determinista

$$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1, q_2\})$$

$$\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1, q_2\} \quad \delta(q_1, a) = \emptyset \quad \delta(q_2, a) = \emptyset$$
$$\delta(q_0, b) = \{q_1, q_2\} \quad \delta(q_1, b) = \{q_1, q_2\} \quad \delta(q_2, b) = \emptyset$$
$$\delta(q_0, c) = \{q_2\} \quad \delta(q_1, c) = \{q_2\} \quad \delta(q_2, c) = \{q_2\}$$

	a	**b**	**c**
q_0	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$



Autómata finito no determinista

- Equivalencia entre AFN y AFD

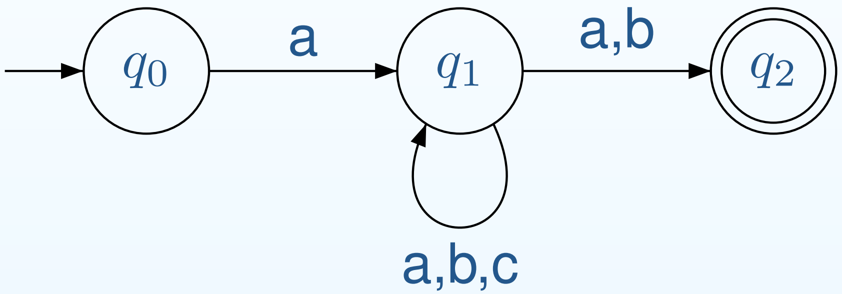
  Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFN.

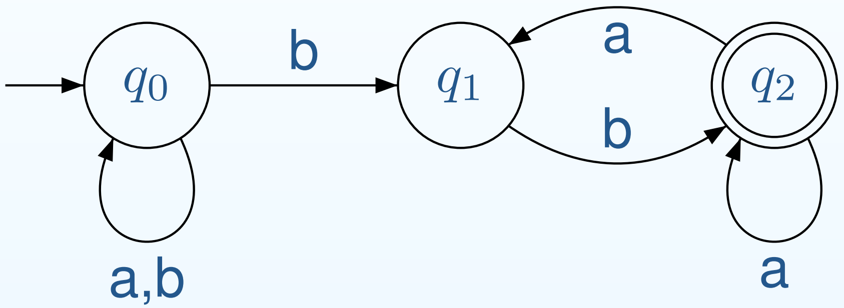
  Construimos un AFD $A' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ tal que $L(A) = L(A')$ de la siguiente forma:

  - $Q' = 2^Q$
  - $q'_0 = \{q_0\}$
  - $F' = \{q' \in Q' \mid q' \cap F \neq \emptyset\}$
  - $\delta'(q', a) = \bigcup_{q \in q'} \delta(q, a) \ : \ q' \in Q, \ a \in \Sigma$

Autómata finito no determinista

- ejercicios:





Autómata finito no determinista con transiciones vacías

- Un *autómata finito no determinista con transiciones vacías* es una 5-tupla $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:
  - Q, Σ, $q_0 \in Q$ y $F \subseteq Q$ el mismo conjunto de estados, alfabeto, estado inicial y conjunto de estados finales que en la definición de AFD y AFN
  - $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to 2^Q$ es una función parcial llamada *función de transición*

- λ-clausura de un estado $q \in Q$ ($\lambda - clausura(q)$): conjunto de estados que pueden alcanzarse desde q sin consumir símbolo.

  Dado $P \subseteq Q$, $\lambda - clausura(P) = \bigcup_{p \in P} \lambda - clausura(p)$

Autómata finito no determinista con transiciones vacías

- Extensión de δ a cadenas $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$
  $\forall q \in Q$, $x \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$
  - $\hat{\delta}(q, \lambda) = \lambda - clausura(q)$
  - $\hat{\delta}(q, xa) = \lambda - clausura\left(\bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(p, a)\right)$

  Pudiendo extender $\hat{\delta}$ para operar sobre conjuntos de estados:

$$\forall P \subseteq Q \quad \hat{\delta}(P, x) = \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}(p, x)$$

- Lenguaje aceptado por un AFλ:

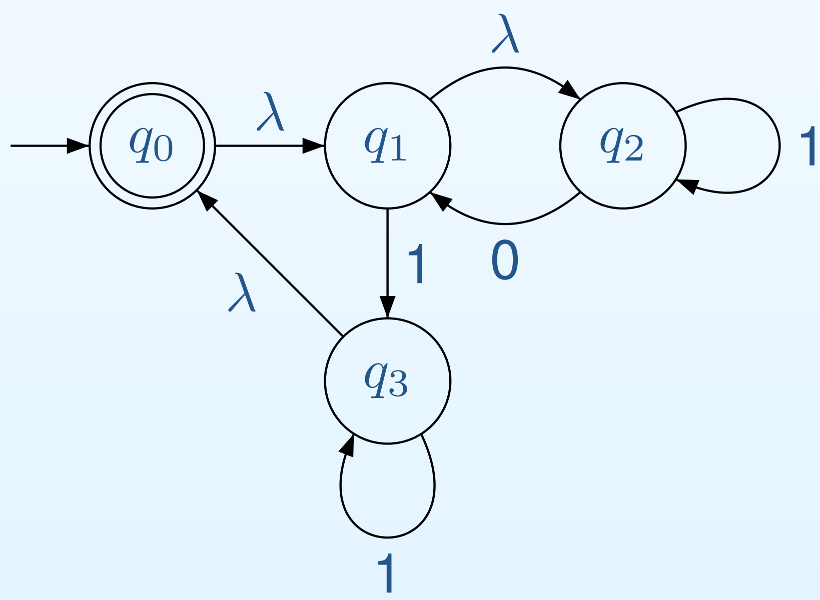
$$L(A) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset\}$$

Autómata finito no determinista con transiciones vacías

$$A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_0\})$$

$\delta(q_0, 0) = \emptyset$	$\delta(q_1, 0) = \emptyset$	$\delta(q_2, 0) = \{q_1\}$	$\delta(q_3, 0) = \emptyset$
$\delta(q_0, 1) = \emptyset$	$\delta(q_1, 0) = \{q_3\}$	$\delta(q_2, 1) = \{q_2\}$	$\delta(q_3, 1) = \{q_3\}$
$\delta(q_0, \lambda) = \{q_1\}$	$\delta(q_1, \lambda) = \{q_2\}$	$\delta(q_2, \lambda) = \emptyset$	$\delta(q_3, \lambda) = \{q_0\}$

	0	**1**	λ
q_0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\{q_0\}$



Autómata finito no determinista con transiciones vacías

- Equivalencia entre AFλ y AFN

  Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFλ.

  Construimos un AFD $A' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F')$ tal que $L(A) = L(A')$ de la siguiente forma:

  - $F' = \begin{cases} F \cup \{q_0\}, & \text{si } \lambda - clausura(q_0) \cap F \neq \oslash \\ F, & \text{en otro caso} \end{cases}$
  - $\delta'(q, a) = \hat{\delta}(q, a)$ tomando $a \in \Sigma, x \in \Sigma^*, q \in Q$ y donde:

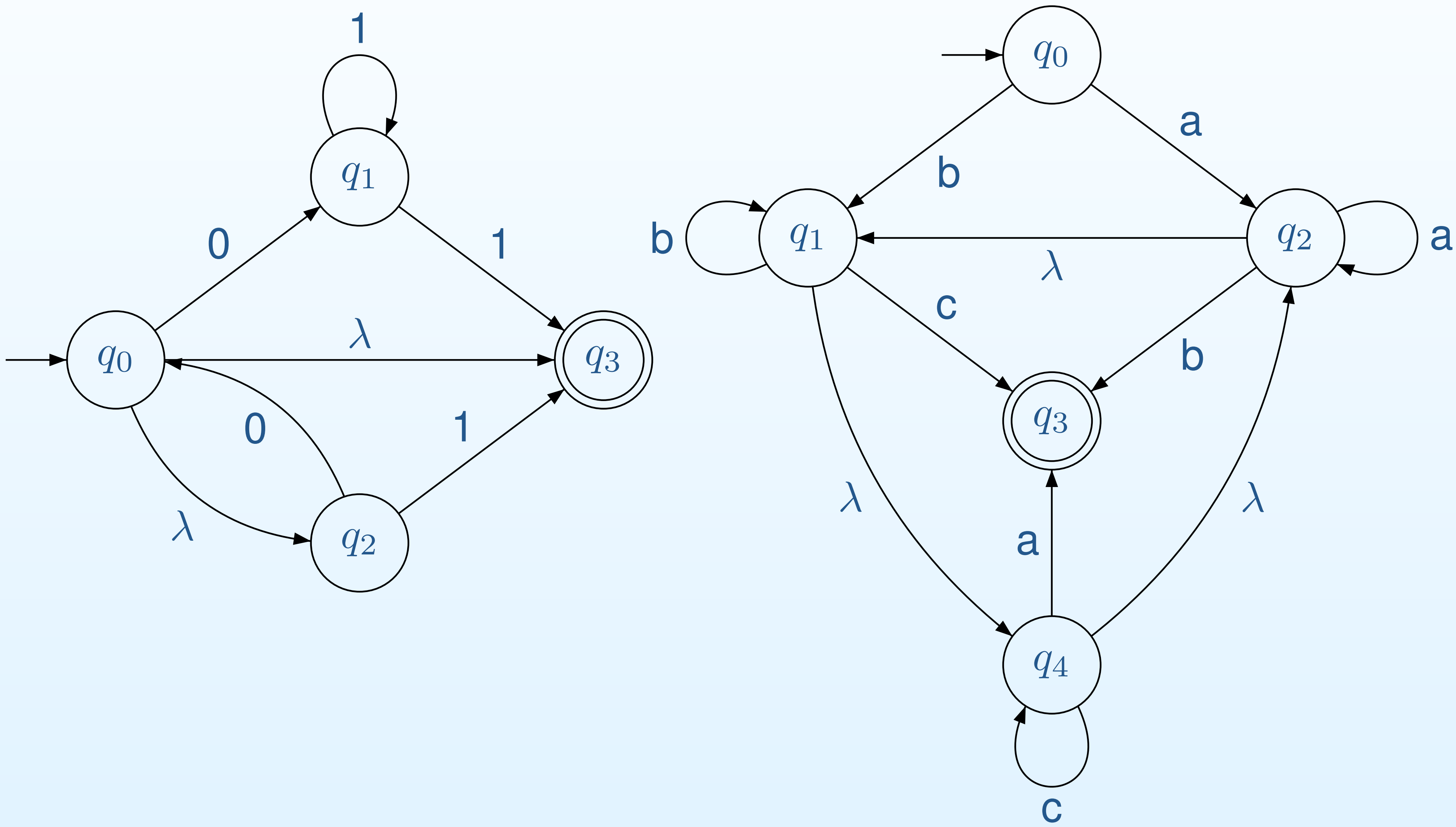
    $\hat{\delta}(q, \lambda) = \lambda - clausura(q)$

    $\hat{\delta}(q, xa) = \lambda - clausura\left(\bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(p, a)\right)$

- A partir de este punto, puede obtenerse un AFD utilizando la transformación ya vista.

Autómata finito no determinista con transiciones vacías

- ejercicios:



Equivalencia Autómata Finito - Gramática Regular

- Si L es un lenguaje regular, entonces L es aceptado por un autómata finito A.
- Dada $G = (N, \Sigma, P, S)$ lineal por la derecha ($L = L(G)$), construimos un AFλ $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $L(A) = L$:
  - $Q = N \cup \{X\}$ tal que $X \notin N$
  - $q_0 = S$
  - $F = \{X\}$
  - función de transición ($A, B, X \in N$, $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$)
    - $\forall (A \rightarrow aB) \in P$ se define $B \in \delta(A, a)$
    - $\forall (A \rightarrow a) \in P$ se define $X \in \delta(A, a)$
    - $\forall a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$ se define $\delta(X, a) = \emptyset$

Equivalencia Autómata Finito - Gramática Regular

- Si L es aceptado por un autómata finito A, entonces L es un lenguaje regular.
- Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFλ ($L = L(A)$). Construimos $G = (N, \Sigma, P, S)$ lineal por la derecha tal que $L = L(G)$
  - $N = Q$
  - $S = q_0$
  - reglas de producción $(q, q' \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\lambda\})$
    - $\forall q' \in \delta(q, q)$ se define $q \to aq' \in P$
    - $\forall q \in F$ se define $q \to \lambda' \in P$