DETERMINANTES

PRÁCTICA # 5

Objetivo general: El estudiante deberá calcular con facilidad el determinante de matrices cuadradas; e, interpretar dicho valor en relación a la matriz.

Objetivos específicos: Para esto el estudiante requerirá:

- Efectuar el cálculo de determinantes de matrices de tamaño 2×2, 3×3 y de mayor tamaño.
- Conocer las propiedades que facilitan el cálculo de determinantes de cualquier tipo de matriz cuadrada.
- Usar la determinante para hallar el rango de una matriz, aplicar en la resolución de sistemas lineales la Regla de Cramer, y para hallar la inversa de una matriz.

1. Problemas propuestos para ser resueltos por el estudiante:

1. Calcule las siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

2. Dadas las matrices:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Calcule $|XY|$, $|A^tB^t|$ y $|BA|$.

3. En general, ¿cuál es el determinante de una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1n} \\ 0 & \cdots & b_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}?$$

4. Sin desarrollar el determinante de forma explícita, demuestre que

   a) Si a, b y c son reales, entonces $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a)$.

   b) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$.

   c) Si α, β y γ son números reales, entonces $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0$.

5. Resuelva la igualdad y la desigualdad siguiente:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

6. Calcule el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Hallar y en los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 1 \\ x + 3y - 2z & = & 0 \\ 4x - 3y + z & = & 2 \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} 4x + y + z + w & = & 1 \\ x - y + 2z - 3w & = & 0 \\ 2x + y + 3z + 5w & = & 0 \\ x + y - z - w & = & 2 \end{array}.$$

2. Problemas propuestos para ser resueltos por el auxiliar docente:

1. Hallar el determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 0 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2. Escalonando la matriz de Vandermonde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

muestre que su determinante es igual a $\prod_{i>j}(x_i - x_j)$, luego V es inversible si, y solo si, los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son dos a dos diferentes. Como aplicación, muestre que, dados $n+1$ pares de números $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, donde $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, existe un, y sólo un, polinomio p de grado $\leq n$ tal que $p(x_0) = y_0, \ldots, p(x_n) = y_n$.

3. Sea $a_j = a_0 + jd$, para $j = 1, 2, \ldots, n$, donde a_0 y d son números reales fijos. Calcule el determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

4. Sea A una matrix antisimétrica de tamaño $n \times n$, con n impar. Probar que $|A| = 0$.
5. Sea la matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño $n \times n$, donde $a_{ij} = \binom{n+i}{j}$. Pruebe que $|A| = 1$.
6. Pruebe que para cualesquiera números reales a, b, c, d, e y f:

$$\begin{vmatrix} (a+b)de - (d+e)ab & ab - de & a + b - d - e \\ (b+c)ef - (e+f)bc & bc - ef & b + c - e - f \\ (c+d)fa - (f+a)cd & cd - fa & c + d - f - a \end{vmatrix} = 0.$$