ESPACIOS VECTORIALES

PRÁCTICA # 2

Objetivo general: El estudiante deberá conocer las propiedades de uno de los sistemas algebraicos: el Espacio Vectorial como objeto fundamental de estudio del álgebra Lineal.

Objetivos específicos: Para esto el estudiante requerirá:

- Observar que la definición de espacio vectorial establece un objeto compuesto de $\mathbb{R}$, de un conjunto de vectores y de dos operaciones.
- Entender de los conceptos básicos en el espacio vectorial: los Subespacios.
- Entender la definición algebraica de dimensión un espacio vectorial, esto mediante el concepto de base.

1. Problemas propuestos para ser resueltos por el estudiante:

1. ¿Puede un espacio vectorial constar de: (a) dos elementos; (b) de un elemento; de 100 elementos?
2. ¿Pueden existir en un espacio vectorial dos elementos nulos?
3. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Se definen
$$\begin{aligned}(x,y)+(x',y') &= (x+x',y+y')\\ c(x,y) &= (cx,y).\end{aligned}$$
¿Es V, con estas operaciones, un espacio vectorial?
4. En $\mathbb{R}^2$, mantengamos la definición del producto αv de un número por un vector, pero modifiquemos de tres maneras diferentes, la definición de la suma de dos vectores $u = (x, y)$ y $v = (x', y')$. En cada tentativa, indicar cuáles de los axiomas de espacio vectorial continúan válidos y cuáles no:
   a) $u + v = (x + y', x' + y)$;
   b) $u + v = (xx', yy')$;
5. Considere $V = V_1 \times V_2$, con V_1 y V_2 espacios vectoriales, cuyos elementos son los pares ordenados $v = (v_1, v_2)$, con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$. Probar que las operaciones en V dados por:
$$\begin{aligned}(v_1,v_2)+(u_1,u_2) &= (v_1+u_1,v_2+u_2)\\ c(v_1,v_2) &= (cv_1,cv_2).\end{aligned}$$
le convierten en un espacio vectorial.
6. En cada caso determinar si W es un subespacio del espacio vectorial correspondiente:
   a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z + 1 = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.
   b) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \wedge x - y + z = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.
7. ¿Cúales de los siguientes conjuntos de vectores $x = (a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$?
   a) todos los x tal que $a_1 \geq 0$;

Date: Agosto del año 2004.

b) todos los x tal que $a_1 + 3a_2 = a_3$;
c) todos los x tal que $a_1 a_1 = 0$.

8. ¿Cuáles de los conjuntos son subespacios vectoriales?
   a) El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas forman una progresión aritmética.
   b) Los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuyas k ($k \leq n$) primeras componentes son iguales.
   c) Las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(0) = f(1)$.
9. Muestre que el vector $v = (1, 2, 2)$ no es combinación lineal de los vectores $v_1 = (1, 1, 2)$ y $v_2 = (1, 2, 1)$.
10. Es fácil ver que
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} \quad \text{y} \quad U\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$$
son subespacios de $\mathbb{R}^3$. Hallar $W \cap U$ y su dimensión.
11. Sea W el subespacio del espacio vectorial de funciones reales, generado por $\cos^2 t$, $\sin^2 t$ y 1. Es $T = \{\cos^2 t, \sin^2 t, 1\}$ una base de W?, en otro caso hallar una base para W.
12. Hallar una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 0, -1)$, $(0, -1, 1)$.
13. Sean x_1, x_2, x_3 los vectores fila y y_1, y_2, y_3 los vectores columna de la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$
Verifique las relaciones $x_3 = 2x_2 - x_1$, $y_3 = 2y_2 - y_1$. Escriba y_1 y y_2 como combinaciones lineales de x_1 y x_2, y viceversa. Concluya que los vectores fila y los vectores columna de la matriz dada generan los mismos subespacios de $\mathbb{R}^3$.
14. Sea W el conjunto de todos los $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de $\mathbb{R}^5$ que satisfacen
$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x_1 & -x_2 & +\frac{4}{3}x_3 & -x_4 & & = & 0 \\ x_1 & & +\frac{2}{3}x_3 & & -x_5 & = & 0 \\ 9x_1 & -3x_2 & +6x_3 & -3x_4 & -3x_5 & = & 0. \end{array}.$$
Encontrar un conjunto finito de vectores que genera W.
15. Demuestre el conjunto
$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$
genera al conjunto de todas las matrices de tamaño 2×2.
16. Sean $V = \mathbb{R}^3$ y U el subespacio generado por $(1, 2, -1)$ y $(2, 1, -3)$. Hallar W subespacio de V tal que $V = U \oplus W$.
17. Encuentre las coordenadas del vector v con respecto a los vectores v_1, v_2 y v_3.
   a) $v = (1, 0, 0)$, $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, -1)$;
   b) $v = (0, 0, 1)$, $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, -1)$;
18. En cada caso, hallar, si existen, las coordenadas del vector X con respecto a los vectores A, B y C.
   a) $X = (1, 1, 1)$, $A = (0, 1, -1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 0, 2)$.
   b) $X = (1, 0, 1, 1)$, $A = (1, 0, -2, 1)$, $B = (2, 0, 1, 2)$, $C = (1, -2, 2, 3)$.
19. Demostrar que si dos vectores son linealmente dependientes, uno de ellos es un múltiplo escalar del otro.

20. ¿Para qué valores de k, los vectores $(k,1,1)$, $(1,k,1)$ y $(1,1,k)$ son linealmente independientes?
21. ¿Son los vectores $(1,1,2,4)$, $(2,-1,-5,2)$, $(1,-1,-4,0)$ y $(2,1,1,6)$ linealmente independientes en $\mathbb{R}^4$?
22. Compruebe que $\{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$ es una base de P_3, luego hallar las coordenadas del vector $2-3x+x^2+2x^3$ con respecto de dicha base.
23. Hallar una base y la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo:

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & 0 \end{array}.$$

24. Probar que $\{1+x+x^2, x+x^2, x^2\}$ es base para P_2 (espacio de polinomios de grado menor o igual a 2).
25. Obtenga una base y consecuentemente determine la dimensión de cada uno de los subespacios del espacio de las matrices de $n \times n$ abajo descritos:
    a) matrices cuya suma de los elementos de la diagonal (traza) es cero.
    b) matrices que tienen la primera y la última fila iguales.
    c) matrices cuya segunda fila es igual a la tercera columna.
26. Pruebe que $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ es un conjunto linealmente independiente en el espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables una infinidad de veces.
27. En $\mathbb{R}^4$, sea U el subespacio generado por $(1,1,0,0)$, $(1,1,1,0)$, $(0,0,1,0)$; y, W es subespacio generado por $(0,2,-2,1)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$. Se sabe que

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W.$$

Hallar $\dim(U+W)$ y $\dim(U \cap W)$.

2. Problemas propuestos para ser resueltos por el auxiliar docente:

1. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Se definen

$$\begin{aligned} (x,y)+(x',y') &= (x+x',0) \\ c(x,y) &= (cx,0). \end{aligned}$$

¿Es V, con estas operaciones, un espacio vectorial?
2. Use las relaciones $2(u+v) = 2u+2v$, $2w = w+w$ para probar que la conmutatividad $u+v = v+u$ puede ser demostrada a partir de los demás axiomas de espacio vectorial.
3. Sean V un espacio vectorial y u, $v \in V$. El **segmento de recta** de extremos u, v es, por definición, el conjunto

$$[u,v] = \{(1-t)u + tv : 0 \le t \le 1\}.$$

Un conjunto $C \subset V$ se llama **convexo**, cuando para todo u, $v \in C$ se tiene $[u,v] \subset C$. Pruebe:
    a) La intersección de dos convexos es convexo.
    b) El conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \le 1\}$ es convexo.
4. ¿Cúales de los siguientes conjuntos de vectores $x = (a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$ $(n \ge 3)$?
    a) todos los x tal que $a_2 = a_1$;
    b) todos los x tal que a_2 es racional.
5. ¿Cuáles de los conjuntos son subespacios vectoriales?

a) El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas forman una progresión geométrica.
b) Los vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2 + 3x = y^2 + 3y$.

6. Pruebe que la unión de dos subespacios vectoriales de V es un subespacio vectorial si, y solo si, uno de ellos estuviera contenido en el otro.
7. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; sea V_P el subconjunto de las funciones pares, $f(-x) = f(x)$; sea V_I el subconjunto de las funciones impares, $f(-x) = -f(x)$.
   a) Demostrar que V_P y V_I son subespacios de V;
   b) Demostrar que $V = V_P \oplus V_I$.
8. Hallar tres vectores de $\mathbb{R}^3$ que sean linealmente independientes y tales que dos cualesquiera de ellos sean linealmente independientes.
9. En el espacio de todos los polinomios de grado menor o igual a 3, determine el vector de coordenadas del polinomio $p(x) = 6 - x - 8x^2 - 8x^3$; en relación a la base $S = \{1 + 2x - x^2 + 3x^3, x + 2x^2 + 4x^3, 4 - 2x - 2x^3, 8x^3\}$.
10. Sean $v = (x_1, x_2)$ y $u = (y_1, y_2)$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$ tales que
$$x_1y_2 + x_2y_2 = 0, \qquad x_1^2 + x_2^2 = y_1^2y_2^2 = 1.$$
Demostrar que $\{v, u\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.
11. Sean u, $v \in V$ vectores linealmente independientes. Dado $\alpha \neq 0$, pruebe que el conjunto de dos elementos $\{v, v + \alpha u\}$ es una base del subespacio generado por los vectores v, $v + u$, $v + 2u$, . . . , $v + nu$, . . .
12. Obtenga una base y consecuentemente determine la dimensión de cada uno de los subespacios del espacio de las matrices de $n \times n$ abajo descritos:
   a) matrices simétricas.
   b) matrices antisimétricas.
   c) matrices en las cuales la suma de los elementos de la primera fila es igual a la suma de los elementos de la segunda columna.
13. Si U y W son subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial, entonces $U+W$ es dimensión finita y
$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W).$$
¿Cuál es la dimensión de $U \oplus W$?