MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

PRÁCTICA # 1

Objetivo general: El estudiante deberá conocer el álgebra de las matrices, la misma será de gran utilidad en la resolución de sistemas de ecuaciones.

Objetivos específicos: Para esto el estudiante requerirá:

- Verificar las condiciones en las dimensiones de las matrices para efectuar las operaciones entre ellas.
- Adquirir experiencia en el manejo de multiplicación de matrices.
- Hallar potencias, transpuestas e inversa de matrices.
- Tratar sistemas de ecuaciones lineales, su solución y sus propiedades.

1. Problemas propuestos para ser resueltos por el estudiante:

1. Sean
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
Encuentre, si es posible, AB, $B - 2C$, $AB - BA$, $(B + C)^t$, $(-2B)^t$ y $C^t A^t$.
2. Determinar la matrix X sabiendo que $X + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = I$.
3. Calcular la matriz AB y compárela con la matriz A, si
$$A = \begin{pmatrix} 82 & -90 & 43 & 8 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & -1 & 100 \\ 10 & -17 & 3 & -45 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
4. Demuestre que para cualquier matriz cuadrada, la matriz $A + A^t$ es simétrica.
5. Hallar la segunda fila, la cuarta columna y el elemento de la fila tres y columna 1 de AB, donde:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$
6. Encuentre A^2 y A^3, siendo
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
7. Sea A una matriz cuadrada.

Date: Agosto del año 2004.

a) Si $A^3 = \mathbf{0}$, demuestre que $I - A$ es inversible.
b) Suponga que $A^2 + 2A + I = \mathbf{0}$, demuestre que A es inversible.

8. Dos matrices cuadradas A y B del mismo tamaño son **semejantes** si existe una matriz inversible P tal que $B = PAP^{-1}$. Suponga que éste es el caso, pruebe que:
   a) B es semejante a la matriz A.
   b) A es inversible si, y sólo si, B es inversible.
9. Si $n \in \mathbb{N}$ cualquiera y

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

   Calcular A^n y B^n.
10. Hallar la matrix X de las ecuaciones:
   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
11. Encuentre la solución general de los sistemas:
   a)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$
   b)
$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = \ 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 & = \ 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 7x_4 & = \ 0 \\ x_1 + 4x_3 + 10x_4 & = \ 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 & = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 & = \ 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 & = \ 0 \end{cases}.$$
12. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, hallar $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, en el sistema $AX = 4X$.
13. ¿Para qué valores de $c \in \mathbb{R}$ los sistemas de ecuaciones que siguen son consistentes?

$$\begin{cases} x - 2y + z + w & = \ c, \\ x - 2y + z - w & = \ -1, \\ x - 2y + z + 5w & = \ 5. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + z + w & = \ 1, \\ x + 2y - z + 4w & = \ 2, \\ x + 7y - 4z + 11w & = \ c. \end{cases}$$

14. Para qué valores de a, en los sistemas que siguen, se tienen: ¿exactamente una solución? ¿infinitas soluciones? ¿ninguna solución?

$$\begin{cases} ax + y + z & = -1, \\ x + ay + z & = -1, \\ x + y + az & = \ 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + y + z & = \ 0, \\ 5x + y - 2z & = \ 2, \\ -2x - 2y + z & = -3. \end{cases}$$

15. En el siguiente sistema, halle la inversa de la matriz de coeficientes, además halle los valores de las incógnitas:

$$\begin{array}{cccccc} x & +2y & +3z & = & 5 \\ 2x & +5y & +3z & = & 3 \\ x & & +10z & = & 1 \end{array}.$$

16. Resolver los sistemas $AX = B$ por medio de la matriz inversa A^{-1}, siendo:
   a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
   b)
$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/4 & 5/2 \\ 3/4 & 1/4 & -3/8 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Problemas propuestos para ser resueltos por el auxiliar docente:

1. Calcular la matriz AB y compárela con la matriz B, si
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -101 & 0{,}1 & 30 & 1 \\ -7 & 0{,}3 & 50 & 40 & 2 \\ 13 & 8 & 6 & 50 & 3 \end{pmatrix}.$$
2. Se dice que una matriz A es antisimétrica si $A^t + A = 0$. Demuestre que para cualquier matriz cuadrada, la matriz $A - A^t$ es antisimétrica. ¿Qué puede decir acerca de los elementos diagonales de una matriz antisimétrica?
3. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Encuentre el producto XA para cada una de las siguientes matrices X. Describa con palabra el efecto sobre A de este producto:
$$X = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Sea A una matriz cuadrada.
   a) Si $A^n = \mathbf{0}$, para algún $n \in \mathbb{N}$, demuestre que $I - A$ es inversible.
   b) Suponga que $A^3 - A + I = \mathbf{0}$, demuestre que A es inversible.
5. Sean A y B semejantes, pruebe que:
   a) B^t es semejante a la matriz A^t.
   b) Suponga que $A^n = \mathbf{0}$ y B es una matriz inversible del mismo tamaño que A, demuestre que $(BAB^{-1})^n = \mathbf{0}$.
6. Si $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ son cualesquiera y
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$
   Calcular A^4 y B^n.
7. Hallar la matrix X de las ecuaciones:
   a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}$. Hallar X tal que satisfaga la ecuación $ACX = B$.
9. Con un ejemplo muestre que el rango de AA^t, A^tA y de A coinciden.
10. Para qué valores de a, el sistema que sigue, tiene: ¿exactamente una solución? ¿infinitas soluciones? ¿ninguna solución?

$$\begin{array}{rrrcl} 2x & -ay & +z & = & 1-2a, \\ x & +y & -az & = & 1, \\ 4x & +y & -az & = & a. \end{array}$$

11. Resuelva completamente el siguiente sistema lineal, analizando todos los posibles valores que puedan tomar α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrrrrcl} \beta x_1 & -\beta x_2 & -\beta x_3 & -\beta x_4 & -\beta x_5 & = & 0 \\ \alpha x_1 & +\alpha x_2 & +\alpha x_3 & +\alpha x_4 & & = & \alpha \\ \alpha x_1 & +\alpha x_2 & +\alpha x_3 & & & = & 0 \\ \beta x_1 & -\beta x_2 & & & & = & \alpha \\ & & & & \gamma x_5 & = & 0 \end{array}.$$

12. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, hallar $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en el sistema $AX = X$.
13. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} p & 1 \\ q & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, determine los valores que p y q tal que se verifique la igualdad: $(A-B)^2 = A^2 - B^2$.
14. Hallar la inversa de la matriz $A = (a_{ij})$ cuando:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ \rho & \text{si } i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Los pasos para la solución de este problema son:

a) Si X y Y son matrices inversibles, mostrar que $(I+XY)^{-1} = I - X(I+YX)^{-1}Y$.

b) Escriba A de la forma $I + XY$ y encuentre su inversa.