UNIVERSIDAD SALESIANA DE BOLIVIA
CARRERA DE CONTADURÍA PÚBLICA

MATEMÁTICAS FINANCIERAS Y ACTUARIALES MAT-214

DOSSIER

GESTION 2013

LIC. GRICEL ELIZABETH VEGA PÉREZ
LIC. MARCOS BERNARDINO SAAVEDRA PORTANDA

PRESENTACIÓN

El presente documento, se constituye en una guía o referencia para los estudiantes que cursan la asignatura **MAT–214 Matemáticas Financieras y Actuariales**, de la Carrera de Contaduría Pública de la Universidad Salesiana de Bolivia.

Representa una recopilación de todos los temas que se encuentran insertos en el Plan de Disciplina aplicable a la Gestión Académica 2013.

La asignatura **MAT–214 Matemáticas Financieras y Actuariales**, es una materia de carácter matemático aplicado a las prácticas contable-financieras que se desarrollan en todo tipo de organizaciones, especialmente en aquellas donde las Inversiones representan su actividad importante como ser la colocación de recursos financieros o monetarios en forma de préstamos y en la Generación de Deuda mediante la captación de estos mismos recursos en forma de depósitos. Esta materia, también es aplicable a Proyectos de Inversión donde los inversionistas o financiadores desean conocer en cualquier momento, la rentabilidad o la tasa de retorno que su inversión le genera. Es una materia orientada y destinada a las personas que tienen relación con el registro contable, administración de empresas, economistas, proyectistas, actividades gerenciales y similares.

Este documento guía, tiene la finalidad de proporcionar al estudiante de la materia **MAT–214 Matemáticas Financieras y Actuariales**, las bases de cálculo para el desarrollo de la materia, no pretende ser un documento completo debido a la amplitud de casos que financieramente se puedan presentar. El criterio y los conocimientos previos adquiridos por los estudiantes permitirán una mejor comprensión de la materia y la resolución de cualquier problema de índole matemático-financiero propuesto.

Para la elaboración del presente trabajo, los docentes que dictan esta asignatura en los turnos de la mañana y de la tarde, coordinaron los contenidos de los Planes de Disciplina presentados y la forma de presentación sobre la base del documento "El ABC del Dossier - Estructura y Criterios para la Elaboración del Dossier" emitido por la Dirección de Planificación y Evaluación de la Universidad Salesiana de Bolivia.

Lic. Gricel Elizabeth Vega Pérez

Lic. Marcos Bernardino Saavedra Portanda

CONTENIDO DEL DOSSIER

Tema No. 1

FUNDAMENTOS MATEMATICOS

1. APROXIMACIONES

Conocido también con el nombre de "redondeo" se aplica la "regla del computador" que dice:

a) El último digito fijado debe incrementarse en una unidad, si los que siguen exceden el valor 500… Ej. Redondear a 4 dígitos: 7,6166501 Resp. 7,6167
b) No debe cambiarse el último digito, si los que siguen son menores que el valor 500… Ej. Redondear a 5 dígitos: 3,5614326 Resp. 3,56143
c) Si los dígitos que siguen al último fijado son exactamente el valor 5 y el último es impar debe incrementarse en una unidad. Ej. Redondear a 4 decimales: 0,751450 Resp. 0,7514; 0,1937500 Resp. 0,1938

2. CONJUNTO DE NUMEROS NATURALES

Los números naturales son utilizados para contar y expresar una determinada cantidad.

N = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10…..∞}

La suma de números naturales, es otro número natural Ej. 3+5 = 8

La resta de números naturales no siempre tiene una solución Ej. 7 – 2 = 5
Pero 2 – 7 = ….. no existe respuesta porque el resultado tiene que ser un número natural

3. CONJUNTO DE NUMEROS ENTEROS

Los números enteros tienen un signo negativo o un signo positivo y el cero que no tiene signo alguno

Z = { -∞,…- 6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,… ∞}

Una operación con los números enteros tiene solución, cuando el resultado es también un número entero.

Ejemplos:
a) Dados los números enteros – 4 y 9; la suma será: – 4 + 9 = 5
b) La resta de los números enteros 2 y 7; será: 2 – 7 = – 5
c) Dados los números enteros 5 y – 3, la multiplicación de ambos números será: 5 * (– 3) = – 15
d) Dados los números enteros – 12 y – 4 , la división de ambos números será: – 12 ÷ – 4 = + 3

4. VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número se define por: $[a] = \left\{ \begin{array}{r} a, \text{ si } a \geq 0 \\ -a, \text{ si } a < 0 \end{array} \right\}$

Ej. Hallar el valor absoluto de:

a) [5] = 5
b) [– 8] = 8
c) [– 3] = 3
d) [1 – 5] = 4
e) [1 – 9 + 5 – 7] =[6 – 16] = [– 10] = 10

5. REGLAS DE SIGNOS

a) Para sumar dos números del mismo signo se suman sus valores absolutos y se antepone al resultado el signo común.

$$7 + 3 = 10$$
$$(-8) + (-4) = -12$$

b) Para sumar dos números de signos contrarios, se efectúa la resta entre sus valores absolutos y se antepone el signo del número mayor.

$$6 + (-2) = +4$$
$$(-5) + 8 = +3$$
$$2 + (-8) = -6$$
$$(-15) + 5 = -10$$

c) Para multiplicar o dividir dos números del mismo signo, se multiplican o dividen sus valores absolutos y se antepone el signo positivo o simplemente se omite.

$$6 * 5 = 30$$
$$-2 * -4 = 8$$
$$-20 / -4 = 5$$
$$\frac{12}{2} = 6$$

d) Para multiplicar o dividir dos números de signos diferentes, se multiplican o dividen sus valores absolutos y se antepone el signo negativo (–).

$$6 * -5 = -30$$
$$-2 * 4 = -8$$
$$-8 / 2 = -4$$
$$\frac{-15}{3} = -5$$

6. CONJUNTO DE NUMEROS RACIONALES – FRACCIONES

El conjunto de números racionales esta formado por dos números enteros. Es decir si *a* y *b* son números enteros podemos formar un racional así: a / b ó $\frac{a}{b}$.

$$Q = \{ x/x = \frac{a}{b} \text{ ; a, b } \epsilon \text{ Z y b} > 0 \} \text{ Entonces } Q = \{ \dots -\frac{7}{2}, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}, \dots \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{3}, \dots\}$$

En un número racional a / b, el número entero *a* se conoce como numerador y *b* como denominador

a) Propiedades de la adición de números racionales

Propiedad interna: La suma de dos números racionales es otro número racional

$$\text{Si } \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12}$$

Propiedad Conmutativa: El orden de los sumandos no altera la suma

$$\text{Si } \frac{3}{4} + \frac{5}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{4}$$
$$\frac{3+10}{4} = \frac{10+3}{4}$$
$$\frac{13}{4} = \frac{13}{4}$$

Propiedad Asociativa: Los sumandos se pueden asociar de diferente manera, no altera la suma.

$$\text{Si } \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{2}\right)$$
$$\left(\frac{2+3}{4}\right) + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{3+10}{4}\right)$$
$$\frac{5}{4} + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{13}{4}$$
$$\frac{5+10}{4} = \frac{2+13}{4}$$
$$\frac{15}{4} = \frac{15}{4}$$

b) Propiedades de la multiplicación de números racionales

Propiedad interna: El producto de dos números racionales es otro número racional

$$\text{Si } \frac{2}{3} * \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ simplificando}$$

Propiedad Conmutativa: El orden de los factores no altera el producto

$$\text{Si } \frac{3}{4} * \frac{5}{2} = \frac{5}{2} * \frac{3}{4}$$
$$\frac{15}{8} = \frac{15}{8}$$

Propiedad Asociativa: Los factores se pueden asociar de diferente manera, no altera el producto.

$$\text{Si } \left(\frac{1}{2} * \frac{3}{4}\right) * \frac{5}{2} = \frac{1}{2} * \left(\frac{3}{4} * \frac{5}{2}\right)$$
$$\left(\frac{3}{8}\right) * \frac{5}{2} = \frac{1}{2} * \left(\frac{15}{8}\right)$$
$$\frac{15}{16} = \frac{15}{16}$$

7. RAZON o PROPORCIONALIDAD

La razón o proporcionalidad es el cociente de dos cantidades expresadas en la misma unidad.

X / Y = q (q es la razón entre X y Y)

Ej. La razón de 3 a 9 es: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ (estamos simplificando)

La razón de 16 a 40 es: $\frac{16}{40} = \frac{2}{5}$

Ej. Si 20 obreros construyen 50 mts. de una carretera en 10 días, cuantos obreros se requieren para construir 1.200 mts. en 60 días?

Sol. El número de obreros es directamente proporcional a los metros que deban construirse, e inversamente proporcional al tiempo en que deban construirse. Si se designa O el número de obreros, M la cantidad de metros, T el tiempo y k a la constante, se tiene:

$$O = \frac{M}{T} * k$$

Donde: O = 20 ; M = 50 ; T = 10, reemplazamos

$$20 = \frac{50}{10} * k \quad => \quad k = \frac{20 * 10}{50} \quad => \quad k = \frac{200}{50} \quad => \quad k = 4$$

Hallamos los obreros:

$$O = \frac{M}{T} * k$$

$$O = \frac{1200}{60} * 4 \quad => \quad O = \frac{4800}{60} \quad => \quad \underline{\underline{O = 80 \text{ obreros } /}}$$

8. LA PROPORCION

Una proporción es la igualdad de dos razones.

Es decir $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

En una proporción a y d reciben el nombre de “extremos” mientras que b y c se conocen como “medios”.

Luego, el producto de medios es igual al producto de los extremos.

$$a * d = b * c$$

Ejemplos:

a) La proporción de 2 es a 3 como 10 es a 15

$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ => si sacamos la 5ta de 10 y 15 tenemos $\frac{2}{3}$

b) Hallar x en: $\frac{x}{4} = \frac{36}{48}$

$X * 48 = 36 * 4 \quad => \quad x = \frac{144}{48} \quad => \quad x = 3$

Luego la proporción es: $\frac{3}{4} = \frac{36}{48}$

9. PORCENTAJE o TANTO POR CIENTO

Cuando nos referimos al porcentaje, lo representamos con el símbolo % que significa “Por ciento”

Ej. a) 20% es una forma de representar $\frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0,20$

b) $\frac{5}{8} = 0,625 * 100 = 62,5\%$

c) $\frac{9}{8} = 1,125 * 100 = 112,5\%$

Ejemplo: Si con una inversión de Bs. 5.000.- se obtiene un rendimiento de Bs. 300.- ¿Qué rendimiento corresponde a cada Bs 100.- de inversión?
Solución: Se establece la proporción:

$$\frac{5000}{300} = \frac{100}{x} \quad => \quad x * 5000 = 100 * 300 \quad => \quad x = \frac{30.000}{5.000} \quad => \quad x = 6 \quad => x = 6\%$$

10. EXPONENTE

Cuando se efectúa una multiplicación de la forma:

$$a * a * a = a^3 \qquad => a^3 = a * a * a$$

En la expresión a^3: "a" se conoce como base y "3" como exponente; el exponente 3 nos indica el número de veces que se multiplica la base "a".

Ejemplo:
a) $2^5 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 \qquad => 2^5 = 32$
b) $(-4)^4 = (-4) * (-4) * (-4) * (-4) \qquad => 256$
c) $(1 + i)^5 = (1+i) * (1+i) * (1+i) * (1+i) * (1+i)$

a) **Leyes de los exponentes:** Las siguientes leyes de exponentes son válidas para cualquier número *n* entero positivo ($n \in Z^+$); donde *a* y *b* son números reales distintos a cero ($a \neq 0$ y $b \neq 0$).

Producto de dos potencias de la misma base: Para hallar el producto de dos potencias de la misma base, basta sumar los exponentes y tomar la misma base.

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

Ej. $2^3 * 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$
$(1+i)^3 * (1+i)^5 = (1+i)^8$

Potencia del producto de dos factores: Para elevar a la *n-ésima* potencia el producto de dos factores, se eleva cada factor a la *n-ésima* potencia.

$$(a * b)^n = a^n * b^n$$

Ej. $(3 * a)^4 = 3^4 * a^4 = 81a^4$

Potencia de una potencia: Para elevar la n-*ésima* potencia de a, a la *n-ésima* potencia, se multiplica los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m * n}$$

Ej. $(3^2)^3 = 3^{2 * 3} = 3^6 = 729$

Cociente de dos potencias de la misma base: Para hallar el cociente de dos potencias de la misma base, se toma la misma base y se restan los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ej. $\frac{5^{10}}{5^7} = 5^{10-7} = 5^3 = 125$

Potencia del cociente de dos factores: Para halla la *n-ésima* potencia del cociente de dos factores, se eleva cada factor a la *n-ésima* potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ej. $\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$

b) Exponente Cero: Toda potencia de exponente cero es igual a la unidad.

$$a^0 = 1 \Rightarrow \frac{a^n}{a^n} = a^n * a^{-n} = a^0 = 1$$

Ej. $12^0 = 1$ => $(3/4)^0 = 1$

c) Exponente entero negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ej. $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ => $3^{-2} = \frac{1}{9}$

d) Exponente fraccionario: Sea *a* la base de una potencia cuyo exponente es $\frac{m}{n}$, entonces

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \; ; a \neq 0$$

Ej. $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

$\frac{a^{5/2}}{a^{1/2}} = a^{5/2} * a^{-½} = a^{4/2} = a^2$

11. LOGARITMOS

Dados dos números reales positivos *n* y *b* se llama logaritmo *n* en base *b* al número *x,* siendo *x* el número al cual hay que elevar *b* para obtener *n*.

$\log_b n = x$ si $b^x = n$ donde: $x > 0$; $b \# 1$; $b > 0$

Las dos expresiones $\log_a x = y$ => $a^y = x$; son equivalentes

Ej. $\log_2 32 = 5$; por que $2^5 = 32$

$\log_5 \frac{1}{25} = -2$: porque $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

a) Propiedad de los logaritmos

- ✓ La función logarítmica es 0 para x = 1, o sea: $\mathbf{\log_a 1 = 0}$
- ✓ El logaritmo de una cantidad igual a la base es 1, es decir: $\mathbf{\log_a a = 1}$
- ✓ El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores

  $$\mathbf{\log_a ABC = \log_a A + \log_a B + \log_a C}$$

- ✓ El logaritmo del cociente de dos cantidades es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor: $\mathbf{\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B}$
- ✓ El logaritmo de la potencia de una cantidad es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la cantidad: $\mathbf{\log_a A^n = n * \log_a A}$
- ✓ El logaritmo de una potencia de la base es igual al exponente: $\mathbf{\log_a a^n = n}$
- ✓ EL logaritmo de la potencia de una fracción es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la cantidad: $\mathbf{\log_a A^{1/p} = \frac{1}{p} * \log_a A}$
- ✓ El logaritmo de un radical es igual al cociente entre el logaritmo de la cantidad subradical y el índice: $\mathbf{\log_a \sqrt[p]{A^1} = \frac{1}{p} * \log_a A}$

b) Logaritmos Decimales: Son los que tienen por base el No. 10, Cuando el logaritmo es decimal se omite la base.

Ejemplos:	a) $\log_{10}$ 100	b) $\log_{10}$ 65	c) $\log_{10}$ 225,50	d) $\log_{10}$ 0,0455
O	a) log 100	b) log 65	c) log 225,50	d) log 0,0455

Nota:

- Los logaritmos de potencia del número 10 son siempre números enteros.
- Los logaritmos de los números que no son potencias de 10 son números decimales.

Ejemplo:

a) log 1.000 = 3	por que 10^3 = 1.000
b) log 100.000 = 5	por que 10^5 = 100.000
c) log 120 = 2,	
d) log 0,0586 = $\bar{2}$,	

Cuando el logaritmo es un número decimal, la parte entera se denomina “**Característica”** y la parte decimal **“mantisa”**.

Ejemplos:

a) log 255 = 2,406540	b) log 0,564 = $\bar{1}$,751279
c) log 75,85 = 1,879956	d) log $\bar{0}$,085 = 2,929419

Cuando se calcula un logaritmo por medio de una calculadora o una computadora el resultado se obtiene de forma directa.

Cuando se utiliza una tabla logarítmica la *mantisa* se obtiene de la tabla y siempre es positiva, en cambio la *característica* se obtiene de la siguiente forma: *La característica del logaritmo es igual al número de cifras enteras menos uno*.

Ejemplo:

a) log 235 = 2,371068 b) log 8,5 = 0,929419 c) log 25 = 1,397940

Para 0 < n < 1, la característica del logaritmo es un número negativo, con valor igual a la cantidad de ceros que posee el número antes de la primera cifra significativa.

En éste caso sólo la característica es negativa, mientras que la mantisa es siempre positiva.

Ejemplo:

a) log 0,25 = - 1 + 0,397940 = $\bar{1}$,397940

b) log 0,0025 = - 3 + 0,397940 = $\bar{3}$,397940

c) log 0,00006 = - 5 + 0,778151 = $\bar{5}$,778151

12. PROGRESIONES

Las progresiones son sucesión de números de una serie.

<u>Serie:</u> es una suma de infinitos números ligados por determinada ley de formación

12.1 Progresiones Aritméticas

Es una sucesión de números llamados *términos*, donde cada uno de los términos posteriores al primero se obtiene añadiendo al término anterior un número fijo llamado la *diferencia* de la progresión.

Ejemplo:

a) 2, 5, 8, 11, 14, 17, ………… la diferencia constante es 3
b) 50, 45, 40, 35, 30, 25, ………la diferencia constante es – 5.

Si se designa por ***a*** el primer término, por ***d*** la diferencia constante y por ***n*** el número de términos, se genera una progresión de la forma:

a, a + d, a + 2d, a + 3d……. a + (n – d) d

El *n-ésimo* término o **último término** es igual a: $\boxed{\mathbf{u = a + (n - 1)*d}}$

Suma de términos de una progresión aritmética: La suma de los términos de una progresión aritmética de n términos es igual a la mitad del número de términos multiplicado por la suma del primer término más el último término.

S = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d)+……….+ [a+(n–3)d] + [a+(n–2)d] + [a+(n–1)d]

Reemplazando **u = a + (n-1)*d**

S = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d)+……….+ [u–2d] + [u–d]+ u

Si invertimos el orden de los términos

S = u + (u – d) + (u – 2d) + ……… + (a + 3d) + (a + 2d) + (a + d) + a

Sumando éstas dos equivalencias se tiene:

$$2\,S = (a + u) + (a + u) + (a + u) + \ldots\ldots\ldots + (a + u) + (a + u) + (a + u)$$

$$2\,S = n\,(a + u) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{S = \frac{n}{2}(a + u)}$$

Ejemplo:

a) Hallar el último término, considerando: a = 4; n = 10; d = 3

u = a + (n-1)*d
u = 4 + (10 – 1) * 3
u = 4 + (9 * 3)
u = 4 +27 => **u = 31/**

El último número es 31 (décimo término), verificando = 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31

b) Hallar el último término, considerando: a = 2; n = 15; d = 4

u = a + (n-1)*d
u = 2 + (15 – 1) * 4
u = 2 + (14 * 4)
u = 2 +56 => **u = 58 /**

El último número es 58 (décimo quinto térmi)= 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58

c) Hallar la suma de los términos de la progresión aritmética del inciso a)

$$\mathbf{S = \frac{n}{2}(a + u)}$$

$$S = \frac{10}{2}(4 + 31) \qquad \Rightarrow \qquad S = 5 * 35 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{S = 175}$$

La sumatoria es 175, verificando = 4+ 7+ 10+ 13+ 16+ 19+ 22+ 25+ 28+ 31 = 175

d) Hallar la suma de los términos de la progresión aritmética del inciso b)

$$\mathbf{S = \frac{n}{2}(a + u)}$$

$$S = \frac{15}{2}(2 + 58) \qquad \Rightarrow \qquad S = 7{,}5 * 60 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{S = 450}$$

La sumatoria verificando = 2+ 6+ 10+ 14+ 18+ 22+ 26+ 30+ 34+ 38+ 42+ 46+ 50+ 54+ 58 = 450

12.2 Progresiones Geométricas

Una progresión geométrica es una sucesión de números dónde cualquier término posterior al primero se obtiene multiplicando el término anterior por un número llamado **razón** de la progresión.

Ejemplo: a) 1, 2, 4, 8, 16…….. razón = 2
b) 7, 21, 63, 189…….razón =3

Se designa *a* al primer término, *r* la razón, y por *n* el número de términos

Se genera una progresión de la siguiente manera:

$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4 \ldots\ldots\ldots\ldots ar^{n-1}$

El n-ésimo término o último es igual a: $\boxed{\mathbf{u = a * r^{n-1}}}$

La **suma** de una progresión geométrica es: $\boxed{\mathbf{S = a \frac{(1 - r^n)}{1 - r}}}$ donde $r \neq 1$

Ejemplos:

a) Construir una progresión geométrica conociendo: n = 6; a = 3; r = 4

3, 12, 48, 192, 768, 3072

b) Halla el 8º término y la suma de los ocho primeros términos de la progresión geométrica 3, 9, 27, 81…..

Identificando datos:

a = 3 => r = 3 => n = 8

$\mathbf{u = a * r^{n-1}}$	$\mathbf{S = a \frac{(1 - r^n)}{1 - r}}$
$u = 3 * 3^{8-1}$	$S = 3 \frac{(1 - 3^8)}{1 - 3}$
$u = 3 * 3^7$	$S = 3 \frac{(1 - 6561)}{-2}$
$u = 3 * 2187$	$S = 3 \frac{(-6560)}{-2}$
u = 6.561	**S = 9.840**

13. OPERACIONES CON DECIMALES, UTILIZANDO POTENCIAS DE 10

Recordando los conocimientos adquiridos, se sabe que:

$$\frac{1}{10} = 10^{-1} = 0{,}1$$

$$\frac{1}{100} = 10^{-2} = 0{,}01$$

$$\frac{1}{1000\ldots0} = 10^{-n} = 0{,}000\ldots01$$

Así

$0{,}43712 = 43.712 * 10^{-5}$

$432{,}6725 = 4.326.725 * 10^{-4}$

Productos de decimales: mediante potencias de 10:

$0{,}326 * 6{,}37 = 326 * 10^{-3} * 637 * 10^{-2}$

$= 326 * 637 * 10^{-3+(-2)}$

$= 207.662 * 10^{-5}$ ó => 2,07662

División entre decimales: mediante potencias de 10:

$30{,}3267 / 2{,}61 = (303.267 * 10^{-4}) / (261 * 10^{-2})$

$= (303.267 / 261) * (10^{-4-(-2)})$

$= (1.161{,}94) * (10^{-2})$ ó => 11,6194

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Realizar las siguientes sumas:

a) 5 + 10 =
b) (- 12) + (-18) +6 =
c) (-4) + (-7) =
d) 32 + (-16) + (-6) =
e) (-12) + (-10) + (-16) +4 =
f) 13 + 10 + (-9) + (-15) =

2. Hallar el valor absoluto de las siguientes expresiones:

a) $|35| =$
b) $|-30| =$
c) $|-72| =$
d) $|(-30) + 15| =$
e) $|15 + (-10) - (-5)| =$
f) $|25 + (-9) - (11)| =$

3. Realizar las siguientes operaciones:

a) (8)(5)(2) =
b) (-6)(-10)(12) =
c) (-14)(-18)(-7) =
d) (12)(-14)(-16)(-21) =
e) (22)(-24)(-6)(10) =
f) (-44) ÷ (-11) =
g) (25) ÷ (-5) =
h) (-81) ÷ (3) =
i) (144) ÷ (12) =

4. Realizar las siguientes operaciones y simplificar:

a) $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{7}{4} =$
b) $\frac{3}{2} + \left[-\frac{1}{2}\right] + \frac{5}{2} =$
c) $\frac{2}{3} - \frac{5}{3} - \frac{4}{3} =$
d) $\left[\frac{16}{15} \div \frac{33}{12}\right] * \left[\frac{15}{14}\right] =$
e) $\frac{6}{5} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} =$
f) $-\frac{10}{3} - \frac{5}{4} + \frac{8}{5} - \frac{5}{6} =$
g) $\frac{-3}{4} * \frac{2}{3} * \frac{1}{2} =$
h) $\left[\frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right] \div \left[\frac{8}{5} + \frac{3}{2}\right] =$
i) $\frac{7}{3} * \frac{-3}{5} * \frac{1}{2} =$
j) $\left[-\frac{6}{5}\right] * \left[\frac{7}{4}\right] * \left[-\frac{11}{8}\right] =$
k) $\left[-\frac{3}{5}\right] \div \left[-\frac{11}{8}\right] =$
l) $\left[-\frac{6}{5} - \frac{9}{3}\right] \div \left[\frac{7}{4} - \frac{2}{3}\right] =$

5. Expresar las siguientes cantidades en porcentajes:

a) 0,01
b) 0,03
c) 0,06
d) 0,10
e) 0,20
f) 0,40
g) 0,65
h) 0,305
i) 0,655
j) 0,3545
k) 1,10
l) 1,25
m) 10,50
n) 25,360
o) 12,34

p) $\frac{1}{5}$
q) $\frac{2}{5}$
r) $\frac{2}{3}$
s) $\frac{5}{4}$
t) $\frac{6}{10}$
u) $\frac{56}{13}$

6. Escribir los siguientes porcentajes en decimales:

a) 5%
b) 12%
c) 18%
d) 45%
e) 60%
f) 0,5%
g) 0,25%
h) ¼ %
i) 1 ½ %
j) $2^{2/3}$ %
k) $5^{1/3}$ %
l) $10^{2/5}$ %
m) 6 ½ %
n) 2 ¼ %
o) $9^{6/9}$ %

7. Encontrar los siguientes porcentajes:

a) El 2% de 500
b) El 6% de 600
c) El 15% de 2000
d) El 18% de 10.000
e) El 36% de 5.000
f) El 25% de 20.000
g) El 4,5% de 3.000
h) El 7,5% de 8.000
i) El 5,3% de 6.000

8. Hallar las siguientes potencias:

a) 2^4 b) $(5-3)^4$ c) $(-½)^6$

9. Hallar el producto de potencias de la misma base

a) $a^4 * a^3$ b) $c^{2a} * c^{4a} * c^{3a}$ c) $(-3)^5 * (-3)^3$

10. Hallar la potencia de otra potencia

a) $(5^2)^3$ b) $(a^5)^7$ c) $(b^{31})^{10}$

11. Hallar el cociente de dos potencias

a) $\frac{3^{10}}{3^5}$ b) $\frac{x^{36}}{x^{25}}$ c) $\frac{y^{15}}{y^{20}}$

12. Hallar los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 32$ b) $\log_3 729$ c) $\log 10.000$

13. Hallar el valor de x

a) $\log_5 625 = x$ b) $\log_2 x = 10$ c) $\log_x 6.561 = 8$

14. Hallar el último término de una progresión aritmética:

a) a = 2 n = 8 d = 4 b) a = 4 n = 12 d = 3 c) a = 2 n = 12 d = 5

15. Hallar la suma de los términos de una progresión aritmética

a) n = 6 a = 5 u =25 b) n = 10 a = 3 u = 48 c) a = 8 n =15 d = - 2

16. Se compra a crédito un bien cuyo valor es de Bs. 10.000 que será pagado con cuotas anuales de Bs 500.- reconociendo un interés del 1% anual

a) Hallar el saldo de la deuda al final del 9no. Año
b) Hallar el importe pagado por concepto de interés hasta el 9no. Año

17. Hallar el decimo termino y la suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética 5, 7, 9,…………

18. Hallar la suma de los 15 primeros términos de la progresión geométrica

$1, (1{,}02), (1{,}02)^2, (1{,}02)^3, \ldots$.

19. Si el 8vo. Termino de una progresión geométrica es 32 y el 5to. Termino es 4, hallar los primeros tres términos.

TEMA No 2

INTERES SIMPLE

1. INTRODUCCIÓN

Desde que el hombre ha actuado en comunidad, surge la idea y la actitud de cooperación entre sus miembros.

Es así que unos solicitan ayuda a otros, ésta ayuda en muchos casos se da con la entrega de algún bien por un determinado tiempo, al cabo del cual se debe devolver el bien y dar un reconocimiento por éste favor (préstamo) recibido.

En la actualidad estos sujetos se conocen como:

a) **Prestamista:** Persona que presta el bien
b) **Prestatario:** Persona que recibe el bien a devolver en un determinado tiempo.

Toda persona que adquiere un préstamo queda obligada a pagar un *interés* o *rédito* por el uso del dinero tomado en préstamo. También podemos decir que la persona o institución que adquiere en calidad de préstamo un determinado importe o capital, esta obligada a pagar un alquiler por el uso de dicho importe que en matemática financiera se conoce como "Interés" generado por dicha operación.

2. DEFINICIÓN

Es una operación financiera, el Interés es el alquiler o rédito que acepta pagar un prestamista por un dinero tomado en calidad de préstamo.

Interés es el retiro que se paga por tener prestado un capital durante un determinado tiempo.

El interés varia en función del tiempo a mayor tiempo de préstamo se debe pagar mayor interés. Se pagara un interés menor si el tiempo es menor; así el interés se paga no por el dinero mismo sino por el transcurso del tiempo de tenencia del dinero. El dinero no tiene valor sino en función del tiempo.

En el interés simple, únicamente el capital gana intereses por todo el tiempo que dura la transacción. Es decir, cuando los intereses devengados no se acumulan al capital inicial.

Es interés simple porque no se agrega el capital, periodo tras periodo por tanto el capital prestado crece, a diferencia del **INTERES COMPUESTO** que crece periodo tras periodo.

	1	2	3	4
Co	Coi	Coi	Coi	Coi

El interés simple es muy útil para operaciones financieras de corto plazo; máximo 365 días.

3. CALCULO DE INTERES

$$\boxed{I = Co * n * i}$$

SIMBOLOGIA:

I = Interés simple o rédito
C, Co = Capital inicial o valor presente
n = Tiempo o plazo de préstamo

i = Tasa o tipo de interés (condicional contractual)
S, Cn = Monto final o valor futuro o valor final
r = Constante que depende de las condiciones contractuales del préstamo
$i = \frac{r}{100}$ (es el tanto por uno)

Ej. 1 Hallar el interés que se obtiene de un préstamo de Bs. 20.000.- por un tiempo de dos años a una tasa de interés del 20% anual

Datos:
I = .?
Co = 20.000
n = 2 años
i = 20% anual = 20/100 = 0,20

I = Co * n * i
I = 20.000 * 2 * 0,20
I = 8.000,-/

Ej. 2 Hallar el interés de un capital de Bs. 15.000 por un tiempo de 18 meses al 24%

Datos:
I = .?
Co = 15.000
n = 18 meses * 1/12 meses = 1,5 años
i = 24% anual = 24/100 = 0,24

I = Co * n * i
I = 15.000 * 1,5 * 0,24
I = 5.400,-/

El interés que se obtiene transcurrido los 18 meses es de Bs. 5.400.- se observa que previo al calculo de interés, el tiempo de 18 meses se ha convertido a su equivalente en años.

El ejemplo anterior también pudo haberse calculado de la siguiente manera:

Datos:
I = .?
Co = 15.000
n = 18 meses
i = 24% anual = 24/100 = 0,24 / 12 meses = 0.02 meses

I = Co * n * i
I = 15.000 * 18 * 0,02
I = 5.400,-/

IMPORTANTE: Tanto el tiempo como la tasa de interés deben necesariamente estar expresados en la misma unidad de medida. Es decir, tienen que estar expresados ambos en años, en meses, en días, etc., para ello utilizamos la formula:

$$\boxed{I = Co * n * \frac{i}{360 \text{ días}}}$$

Si n = años entonces i = % anual $\longrightarrow$ I = Co * n. * i.

n. = semestre $\longrightarrow$ $I = Co * n * i. \frac{\%}{2}$

n. = cuatrimestre $\longrightarrow$ $I = Co * n. * i. \frac{\%}{3}$

n. = trimestre $\longrightarrow$ $I = Co * n * i. \frac{\%}{4}$

n. = bimestre $\longrightarrow$ $I = Co * n * i. \frac{\%}{6}$

n. = meses $\longrightarrow$ $I = Co * n * i. \frac{\%}{12}$

n = días $\longrightarrow$ $I = Co * n * i. \frac{\%}{360.}$

Ej. 3 Cual será el interés que producirá un capital de Bs. 20.000.- al 22% anual por 180 días.

Datos: I = .?
Co = 20.000
i = 22% = 0,22
n = 180 dias

$I = 20.000 * 180 * \frac{0.22}{360}$

$\underline{\underline{I = 2.200\ /}}$

Ej. 4 Cual será el interés que produce un capital de 35.000 si se lo presta al 18% anual por 270 días.

Datos: I = .?
Co = 35.000
i = 18% = 0,18 anual
n = 270 días

$I = 35.000 * 270 * \frac{0.18}{360}$

$\underline{\underline{I = 4.725.-\ /}}$

Ej. 5 Cual será el interés que producía un capital de $ 4.500 si se lo presta al 15% anual por 7 meses.

Datos: I = .?
Co = $ 4.500.-
i = 15% = 0,15 anual
n = 7 meses

$I = 4.500 * 7 * \frac{0.15}{12}$

$\underline{\underline{I = 393.75\ /}}$

4. CALCULO DE LOS DEMAS ELEMENTOS

$$\boldsymbol{I = Co * n * \frac{i}{360}}$$

$$Co = \frac{I}{n. * \frac{i.}{360}} \qquad n = \frac{I}{Co * \frac{i.}{360}} \qquad i = \frac{I}{Co * n} * 360$$

4.1 CALCULO DE "Co" (Capital inicial)

$$\boxed{Co = \frac{I}{n. * i.} * 360}$$

. 6 Cual fue el capital prestado si al cabo de 9 meses y 15 días el interés producido al 24% anual es de Bs. 1.850

$$Co = \frac{1.850}{285 * \frac{0,24}{360}}$$

$$Co = \frac{1.850,-}{0,19}$$

$$\underline{\underline{Co = 9.736,84\ /}}$$

C.A.
n = 9 meses * 30 días
n = 270 días +15 días
n = 285 días

Ej. 7 Cuanto tenemos que prestar para poder cobrar un interés de Bs. 2.000 cada mes, si la tasa de interés es del 28% anual

$$Co = \frac{2.000}{30 * 0.28} * 360$$

$$Co = \frac{720.000}{8,40}$$

$$\underline{\underline{Co = 85.714,29\ /}}$$

4.2 CALCULO DE "n." (Tiempo)

$$n. = \frac{I}{Co * i} * 360$$

Ej, 8 Al cabo de cuanto tiempo un capital prestado de $ 10.000 producirá un interés de $500 si la tasa de interés es del 18% anual

$$n. = \frac{500}{10.000 * 0{,}18} * 360 = \frac{180.000.-}{1.800.-} \qquad \underline{\underline{n. = 100 \text{ días}}} /$$

Ej. 9 Al cabo de cuanto tiempo un capital de Bs. 5.000 producirá un interés de Bs. 5.000 si se lo presta al 36% anual.

$$n. = \frac{5000}{5000 * 0.36} * 360$$

$\underline{\underline{n. = 1000 \text{ días}}} /$

4.3 CALCULO DE "i." (Tasa de interés)

$$\mathbf{i. = \frac{I}{Co * n.} * 360}$$

Ej. 10 A que tasa de interés fue prestado un capital de $9.000 si al cabo de 220 días produce un interés de $1250

$$i. = \frac{1.250}{9.000 * 220} * 360$$

$i. = 0{,}22727$

$i. = 0{,}22727 * 100 \Rightarrow \underline{\underline{i. = 22{,}73\%}} /$

Ej. 11 Usted adquiere un préstamo de Bs. 3.000.- por un tiempo de 20 meses, al cabo del cual paga un interés de Bs. 600.- Hallar la tasa de interés aplicado en la presente operación.

$$i. = \frac{600}{3000 * 20} * 12$$

$$i = \frac{7200}{60000}$$

$i = 0{,}12 * 100 \Rightarrow \underline{\underline{i. = 12\ \%\ \text{anual}}} /$

Ej. 12 Dos hermanos obtienen un crédito del banco UNION SA El hermano mayor obtiene un crédito de Bs. 10.000 y el hermano menor otro importe, transcurrido un año el banco recibe un interés total de ambos prestamos Bs. 2.160. Hallar el importe del crédito obtenido por el hermano menor si la tasa de interés que aplica el banco es del 12% anual.

Datos:

Hermano Mayor

$Co = 10.000$
$n = 1$ año
$I_t = 2.160$ (I mayor + I menor)
$i = 12\%$ anual $= 0{,}12$
$I = .?$

$I = Co * n * i$
$I = 10.000 * 1 * 0{,}12$
$\underline{\underline{I = 1.200,-}}/$

Hermano Menor

$Co = .?$
$n = 1$ año
$I = .?$
$i = 12\%$ anual $= 0{,}12$

$I_t = I\ mayor + I\ menor$
$I\ menor = I_t - I\ mayor$
$I\ menor = 2.160 - 1.200$
$\underline{\underline{I\ menor = 960,-}}/$

$$Co = \frac{I}{n * i} \qquad Co = \frac{960}{1 * 0{,}12} \qquad \underline{\underline{Co = 8.000,-}}/$$

4.3.1 CLASIFICACIÓN DEL INTERES

a) INTERÉS SIMPLE ORDINARIO O COMERCIAL

Es el interés que se calcula considerando el año de 360 días y mes comercial de 30 días

La utilización del año de 360 días simplifica algunos cálculos, sin embargo aumenta el interés cobrado por el prestamista.

b) INTERES SIMPLE REAL O EXACTO

Es el interés que se calcula considerando un año calendario de 365 días ó 366 días si se trata de un año bisiesto.

Ej. 13 Determinar el interés ordinario y exacto sobre Bs. 60.000.- al 9% anual durante 50 días

Datos: Co = 60.000 i = 9 % n = 50 días

Interés Simple Ordinario I_o

$$I_o = 60.000 * 50 \text{ d} * \frac{0{,}09}{360 \text{ d}}$$

I_o = 750.- Bs. /

Interés Simple Exacto I_e

$$I_e = 60.000 * 50 \text{ d} * \frac{0{,}09}{365 \text{ d}}$$

I_e = 739,73 Bs. /

c) CÁLCULO APROXIMADO DEL TIEMPO

Se realiza suponiendo que cada mes tiene 30 días

d) CÁLCULO EXACTO DEL TIEMPO

Para éste cálculo se toma el número exacto de días, tal como se encuentra en el calendario anual. Es importante considerar que se debe tomar una de las dos fechas (inicial o final).

Ej. 14 Calcular en forma aproximada y exacta el tiempo transcurrido del 10 de mayo al 15 de septiembre del mismo año.

Solución:

Tiempo Aproximado

Del 10 de mayo al 15 de septiembre:
Mayo = 20 días
Junio = 30 días
Julio = 30 días
Agos = 30 días
Sept = 15 días
Total = 125 días

O calcular según la fecha:

15 – 09 – 2011
Menos 10 – 05 – 2011
5 – 4 – 0 El tiempo aproximado es de 4 meses y 5 días
Si 4 * 30 días = 120 días + 5 días = **125 días**

Tiempo exacto

Del 10 de mayo al 15 de septiembre:
Mayo = 21 días
Junio = 30 días
Julio = 31 días
Agos = 31 días
Sept = 15 días
Total = 128 días

Ej. 15 Determinar el interés ordinario de un crédito de Bs. 10.000 al 8% anual del 10 de julio al 25 de octubre del mismo año, considerando tiempo aproximado y tiempo exacto.
Solución:

Tiempo Aproximado

Del 10 de julio al 25 de octubre:
Julio = 20 días
Agos= 30 días
Sept = 30 días
Oct = 25 días
Total = 105 días

$$\mathbf{I_O = Co. * n * i}$$
$$I_O = 10.000 * 105 * \frac{0,08}{360}$$
$$\underline{\mathbf{I_O = 233,33\ /}}$$

Tiempo exacto

Del 10 de julio al 25 de octubre:
Julio = 21 días
Agos = 31 días
Sept = 30 días
Oct = 25 días
Total = 107 días

$$\mathbf{I_O = Co. * n * i}$$
$$I_O = 10.000 * 107 * \frac{0,08}{360}$$
$$\underline{\mathbf{I_O = 237.78\ /}}$$

Ej. 16 Considerando el ejemplo 12 calcular el interés exacto con tiempo aproximado y tiempo exacto.
Solución:

Tiempo Aproximado

Del 10 de julio al 25 de octubre:
Total = 105 días

$$\mathbf{I_e = Co. * n * i}$$
$$I_e = 10.000 * 105 * \frac{0,08}{365}$$
$$\underline{\mathbf{I_e = 230,14\ /}}$$

Tiempo exacto

Del 10 de julio al 25 de octubre:
Total = 107 días

$$\mathbf{I_e = Co. * n * i}$$
$$I_e = 10.000 * 107 * \frac{0,08}{365}$$
$$\underline{\mathbf{I_e = 234.52\ /}}$$

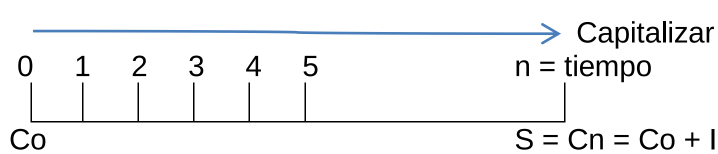
Es importante analizar con cuidado los resultados obtenidos en los dos ejemplos anteriores:

En la práctica se utiliza con mayor frecuencia y especialmente en las instituciones financieras, el interés ordinario con tiempo exacto, porque reporta mayor interés. Este interés se conoce como "*Interés Comercial o Bancario".*

5. CALCULO DEL VALOR FINAL, VALOR FUTURO O MONTO FINAL A INTERÉS SIMPLE

5.1 Monto final "Cn" ó "S".- Monto o capital final es la suma del capital más el interés simple a la fecha de vencimiento.

El concepto de *capitalización*, se refiere al estudio del monto o valor final en que se convertirán los capitales colocados en fechas anteriores. Es decir, ***capitalizar*** es trasladar o valorizar capitales del presente al futuro.



Si $I = Co * n * i$ y $Cn = Co + I$
Entonces: $I = Co * n * i$ $I = Cn - Co$
Igualamos los dos miembros:
$$Co * n * i = Cn - Co$$
$$Cn = Co + (Co * n * i)$$

$$\boxed{Cn = Co\ (1 + n * i)}$$

Ej. 17 En cuanto se convertirá un capital de Bs. 8.500 si se lo presta al 24% anual por 270 días.

$$Cn = 8.500\left(1 + 270 * \frac{0.24}{360}\right)$$

$\underline{\underline{Cn = 10.030.- /}}$

Verificación

$I = Co * n * i$

$I = 8.500 * 270 * 0,24 / 360$

$\underline{\underline{I = 1.530.- /}}$

$Cn = 8.500 + 1.530$

$\underline{\underline{Cn = 10.030.- /}}$

Ej. 18 Encontrar el valor final de Bs. 8.000 al 15% por un lapso de 20 meses

Datos: $Cn = .?$

$Co = 8.000$

$i = 15\% = 0,15/12$ meses $= 0,0125$

$n = 20$ meses

$Cn = 8.000\ (1 + 20 * 0,0125)$

$\underline{\underline{Cn = 10.000.-/}}$

Ej. 19 El señor Fernández adquiere un equipo que tiene un costo de Bs. 8.500 en la forma siguiente: paga al contado Bs. 2.500.- y el saldo a 15 meses plazos con un recargo del 24% de interés ¿Cuánto paga al final del plazo?

Datos:	Precio del equipo	Bs. 8.500
	Pago al contado	(Bs. 2.500)
	Saldo de la deuda	Bs. 6.000

$Co = 6.000$

$n = 15$ meses

$i = 24\%$

$Cn = .?$

$Cn = Co(1 + n * i)$

$$Cn = 6.000\ 1 + 15 * \frac{0,24}{12})$$

$\underline{\underline{\mathbf{Cn = 7.800.-/}}}$

Ej. 20 En cuanto tiempo un capital se duplica al 5% de interés simple

Datos: $Co = x$

$Cn = 2x$

$i = 5\%$

$n = .?$

$Cn = Co\ (1 + n*i)$

$2x = x\ (1 + n * 0,05)$

$\frac{2x}{x} = 1 + n * 0,05$

$2 – 1 = n * 0,05$

$\frac{1}{0,05} = n$

$\underline{\underline{\mathbf{n = 20\ años/}}}$

<u>CALCULO DE LOS DEMAS ELEMENTOS</u>

$$\boxed{\mathbf{Cn = Co * \left(1 + n * \frac{i}{360}\right)}}$$

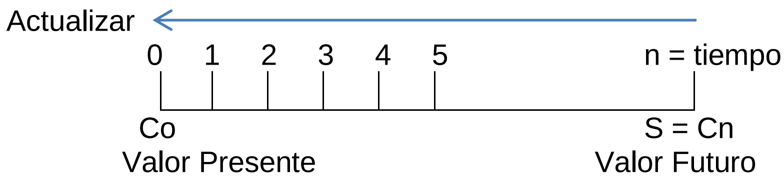
$$\boxed{Co = \frac{Cn}{1 + n * \frac{i.}{360}}} \qquad \boxed{n = \frac{Cn - Co}{Co * i}} \qquad \boxed{i = \frac{Cn – Co}{Co * n}}$$

5.2 <u>Cálculo de capital inicial, valor presente “Co”</u>

El concepto de *actualización* se refiere al estudio del valor en la fecha actual o presente de capitales que se recibirán en fechas futuras.

El valor actual o presente de una suma que vence en fecha futura, es aquel capital que, a una tasa de interés y por el tiempo de duración hasta la fecha de vencimiento, alcanzará un valor o monto final.

Actualizar es traer y valorizar capitales del futuro al presente



$$\boxed{Co = \frac{Cn}{1 + n \cdot \frac{i}{360}}}$$

Ej 21 Cuanto prestó una señora si al cabo de 251 días a una tasa del 28% anual recibe un capital de Bs. 50.000

$$Co = \frac{50.000}{1 + 251 * \frac{0.28}{360}}$$

$$Co = \frac{50.000}{1,1952222}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{Co = 41.833,22\ /}}}$$

Ej. 22 Usted adquiere un artefacto eléctrico a crédito, bajo las siguientes condiciones: Pago al contado de Bs. 2.000.-, dos pagos de Bs. 4.000 y Bs. 6.000 que deben ser pagados el primero dentro de tres meses y el segundo dentro de seis meses. Hallar el precio al contado del artefacto, si la tasa de interés es del 24% de interés simple.

Datos: Precio al contado = Cuota inicial + el valor presente de los dos pagos futuros

$$PC = CI + Co_1 + Co_2$$

Cuota inicial = 2.000

Cálculo de Co_1 de la primera cuota

Cn = 4.000
i = 24%
n = 3 meses

$$Co = \frac{Cn}{1 + n * i}$$

$$Co = \frac{4.000}{1 + 3 * \frac{0,24}{12}}$$

$$Co = \frac{4.000}{1,06}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{Co = 3.773,58/}}}$$

Cálculo de Co_2 de la segunda cuota

Cn = 6.000
i = 24%
n = 6 meses

$$Co = \frac{Cn}{1 + n * i}$$

$$Co = \frac{6.000}{1 + 6 * \frac{0,24}{12}}$$

$$Co = \frac{6.000}{1,12}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{Co = 5.357,14/}}}$$

$$PC = CI + Co_1 + Co_2$$

$$PC = 2.000 + 3.773.58 + 5.357,14$$

$$\underline{\underline{\mathbf{PC = 11.130,72/}}}$$

Ej 23 Se desea alquilar un departamento por un año bajo las siguientes alternativas: Paga al contado Bs. 6.300 o pagar el final del año Bs. 6.600. En caso de pagar dentro de un año tiene la oportunidad de invertir al 8% de interés anual. ¿Qué alternativa es la mejor?

Datos:

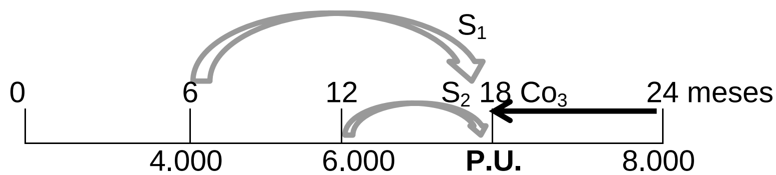
S = 6.600 n = 1 año i = 8% ó 0,08 anual Co = .?

$Co = \frac{S}{1 + (n * i)}$ $Co = \frac{6.600}{1 + (1 * 0,08)}$ $Co = \frac{6.600}{1,08}$ **Co = 6.111.11 /**

La mejor alternativa es pagar dentro de un año, porque al pagar Bs. 6.600.- dentro de un año ahorro Bs. 188.89. (Al contado Bs. 6.300 menos Bs. 6.111.11 = Bs. 188.89).

Ej 24 El señor Fernández adquiere un bien a crédito bajo las siguientes condiciones: tres cuotas de Bs. 4.000.-; Bs. 6.000.- y Bs. 8.000.- que serán pagadas dentro de seis meses, un año y dos años respectivamente. Al no haber cumplido con las dos primeras obligaciones, el Sr. Fernández propone a su acreedor pagar toda la deuda con un único pago a realizar dentro de un año y medio de haber contraído las obligaciones. Hallar el importe del pago único considerando la tasa de interés del 4%.

Solución



Pago único (PU) = valor final de las dos primera obligaciones + valor actual de la 3º obligación.

$PU = S_1 + S_2 + Co_3$

Cálculo S_1

$S_1 = C (1 + n * i)$

$S_1 = 4.000 (1 + 1 * 0,04)$

$S_1 = 4.000 (1,04)$

S_1 = 4.160.- /

Cálculo S_2

$S_2 = C (1 + n * i)$

$S_2 = 6.000 (1 + 6 * \frac{0,04}{12})$

$S_2 = 6.000 (1,02)$

S_2 = 6.120.- /

Cálculo Co_3

$Co_3 = \frac{S}{(1 + n * i)}$

$Co_3 = \frac{8.000}{(1 + 6 * \frac{0,04}{12})}$

$Co_3 = \frac{8.000}{1,02}$ **Co_3 = 7.843,14 /**

$PU = S_1 + S_2 + Co_3$

PU = 4.160 + 6.120 + 7.843,14

PU = 18.123,14 / => Pago único al finalizar el año y medio

5.3 Calculo del Tiempo o Plazo "n"

En las operaciones financieras a menudo es necesario determinar el tiempo o plazo, tanto de inicio como de finalización de una transacción o crédito. Cálculo que se realiza mediante:

$$\boxed{n = \frac{Cn - Co}{Co * i}}$$

Ej. 25 Al cabo de cuanto tiempo se triplicará un capital cualquiera si se lo presta al 25% anual.

$3 * Cn = Co (1+n. * \frac{0.25}{360})$ Si Cn = Co = 1

Entonces:

$3 = 1+\frac{n * 0.25}{360}$=> $3 – 1 = n * \frac{0,25}{360}$

2 = (n * 0.25) / 360

$$n = \frac{2 * 360}{0.25}$$

$\underline{n = 2.880 \text{ días } /}$

Ej. 26 ¿En cuanto tiempo se acumularan Bs. 7.600 si se depositan hoy Bs. 4.000 en un fondo que paga el 36% de interés simple anual?

Datos: Cn = 7.600
Co = 4.000
i = 36% anual
n = .?

$$n = \frac{Cn - Co}{Co * i}$$

$$n = \frac{7.600 - 4.000}{4.000 * 0,36} = \frac{3.600}{1.440}$$

$\underline{n = 2,5 \text{ años } /}$

Ej. 27 El 10 de junio se firmo un pagare por Bs. 10.000.- con un interés del 4% mensual. ¿En que fecha se acumularan Bs. 11.360?

Datos: Cn = 11.360
Co = 10.000
i = 4% mensual
n = .?

$$n = \frac{Cn - Co}{Co * i}$$

$$n = \frac{11.360 - 10.000}{10.000 * 0,04} = \frac{1.360}{400}$$

$\underline{n = 3.4 \text{ meses } /}$

Es decir 3.4 meses * 30 días = 102 días, entonces la fecha será el 20 de septiembre. (20 días de junio, +31 días julio, +31 días agosto + 20 días de septiembre = 102 días)

5.4 Calculo de la Tasa de Interés "i"

En las operaciones financieras a veces es necesario determinar la tasa o tipo de interés que se considera en una transacción, la misma que se obtiene según la siguiente relación:

$$\boxed{i = \frac{Cn - Co}{Co * n}}$$

Ej. 28 ¿A que tasa de interés anual un capital de Bs.2.000 en 18 meses se convierte en Bs 2.720?

Datos: Cn = 2.720
Co = 2.000
i = .?
n = 18 meses

$$i = \frac{Cn - Co}{Co * n}$$

$$i = \frac{2.720 - 2.000}{2.000 * 18} = \frac{720}{36.000}$$

$\underline{i = 0,02 \text{ meses } /}$

Es decir: 0,02 mes * 12 meses = 0,24 anual *100 = 24% anual

Ej. 29 El señor Blanco compra una lavadora eléctrica que cuesta Bs. 6.500 Paga al contado Bs. 3.000 y acuerda pagar el importe de Bs. 4.200 cuatro meses después ¿Qué tipo de interés simple paga?

Datos: Cn = 4.200
Co = 6.500 – 3.000 = 3.500
i = .?
n = 4 meses

$$i = \frac{Cn - Co}{Co * n}$$

$$i = \frac{4.200 - 3.500}{3.500 * 4} = \frac{700}{14.000}$$

$\underline{i = 0,05 \text{ meses } /}$

Es decir: 0,05 mes * 12 meses = 0,60 anual *100 = 60% anual

Ej. 30 ¿A que tasa de interés se quintuplicará un capital cualquiera si se lo presta por un año?

Datos: $Cn = 5x$
$Co = x$
$i = .?$
$n = 1$ año

$$i = \frac{Cn - Co}{Co * n}$$

$$i = \frac{5x - x}{x * 1} = \frac{4x}{x}$$

i = 4 anual /

Es decir: 4 anual *100 = 400% anual

Ej. 31 ¿Cuanto deberá por concepto de su capital e intereses un prestamista por un capital inicial de Bs. 20.000 al 18% anual por 6 meses?

Datos: $Cn = .?$
$Co = 20.000$
$n = 6$ meses
$i = .?$

$$Cn = 20.000 \left(1 + 6 * \frac{0.18}{12}\right)$$

$$Cn = 20.000 (1 + 0.09)$$

Cn = 21.800.- /

Ej. 32 ¿En cuanto se convertirá un capital prestado de $ 6.000 al 22% anual al cabo de 270 días?

Datos: $Cn = .?$
$Co = 6.000$
$n = 270$ días
$i = 22\%$

$$Cn = 6000 \left(1 + 270 * \frac{0.22}{360}\right)$$

$$Cn = 6000 (1.165)$$

Cn = 6.990.- /

Ej. 33 ¿A que tasa de interés un capital de 3000 se convertirá en 4000 si se lo presta por 300 días?

Datos: $Cn = 4.000$
$Co = 3.000$
$i = .?$
$n = 300$ días

$$i = \frac{Cn - Co}{Co * n}$$

$$i = \frac{4.000 - 3.000}{3.000 * 300} = \frac{1.000}{900.000}$$

i = 0,001111 día /

Es decir: 0,001111 día * 360 días = 0,4 anual *100 = 40% anual
Verificando:

$$Cn = 3000 \left(1 + 300 * \frac{0.4}{360}\right)$$

$$Cn = 3000 * (1,333333)$$

Cn = 4.000.- /

Ej. 34 Dos capitales son prestados a 120 y 180 días respectivamente al 24% anual produciendo un monto total de $ 22.500 si el primer capital es un tercio del segundo.

a) hallar la cuantía de los capitales
b) hallar el monto producido por cada capital

Datos: a) $Co_1 = 1/3\ Co_2$. $Co_2 = .?$
$n_1 = 120$ días
$n_2 = 180$ días
$i = 24\%$ anual
$Cn = 22.500$

$$Co_1 \left(1 + \frac{n\ i.}{360}\right) + Co_2 \left(1 + \frac{n\ i.}{360}\right) = 22.500$$

$$\frac{1}{3} Co_2 \left(1 + 120 * \frac{0,24}{360}\right) + Co_2 \left(1 + 180 * \frac{0,24}{360}\right) = 22.500$$

$$\frac{1}{3} Co_2 * (1,08) + Co_2 * (1,12) = 22.500$$

$$0,36 * Co_2 + 1,12 * Co_2 = 22.500$$

$$1,48\ Co_2 = 22.500$$

$$Co_2 = \frac{22.500}{1,48}$$

Co_2= 15.202,70/

Hallamos Co_1:

$Co_1 = 1/3 * 15.202,70$

$Co_1 = 5.067,57$ /

Datos: b)

$I = Co * n * i$

$I = 5.067,57 * 120 * \frac{0,24}{360}$

I = 405.41 /

$I = Co * n * i$

$I = 15.202,70 * 180 * \frac{0,24}{360}$

I = 1.824,32 /

Verificando:

$Cn_1 = 5.067,57 + 405,41 = 5.472,98$

$Cn_2 = 15.202,70 + 1.824,32 = \underline{17.027,02}$

Cn = 22.500

6. ECUACIONES DE VALORES EQUIVALENTES

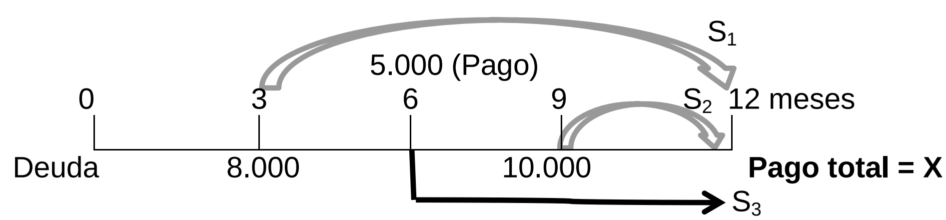
Es frecuente que las obligaciones contraídas puedan modificarse, en nuevas condiciones para el cumplimiento de las mismas, por eso es importante que en las operaciones financieras donde exista 2 o más transacciones diferentes sea necesario replantear para expresarlas en una o varias operaciones que produzcan el mismo resultado económico. Esto se expresa en ecuaciones de valores equivalentes. *“Operaciones de la deuda = Operaciones de pago”*

En interés simple es importante tomar en cuenta que dos conjuntos de obligaciones que son equivalentes en cierta fecha, pueden no serlo en otra fecha.

Para establecer una ecuación de valor equivalente es importante determinar una fecha de referencia, llamado también ***fecha focal***. Para determinar la fecha focal se debe analizar cuidadosamente el problema, puesto que los datos deben corresponder estrictamente a las condiciones establecidas, los cambios de fecha focal producen variaciones en la determinación de las cantidades.

Ej. 35 Una persona contrae dos obligaciones de Bs. 8.000 y Bs. 10.000 que serán pagadas, la primera dentro de tres meses y la segunda dentro de nueve meses. Transcurridos seis meses desde la suscripción de las obligaciones y no habiendo cumplido con el primer pago, el deudor queda de acuerdo con su acreedor pagar en éste momento Bs. 5.000 y el saldo dentro de un año de haber contraído la deuda a una tasa de interés del 12%. ¿Cuánto tendrá que pagar al final del año para liquidar la deuda?

Solución



Según la gráfica, el número de operaciones a considerar, en éste caso son dos operaciones de deuda y dos operaciones de pago.

El valor total de las operaciones de deuda debe ser igual al valor total de las operaciones de pago. Entonces:

Operación de la deuda	“igual”	Operación de pago
$S_1 = Co\ (1 + n * i)$		$S_3 = Co\ (1 + n * i)$
$S_1 = 8.000\ (1 + 9 * \frac{0,12}{12})$		$S_3 = 5.000\ (1 + 6 * \frac{0,12}{12})$
$S_1 = 8.000 * 1,09$		$S_3 = 5.000 * 1,06$

$\underline{S_1 = 8.720.- /}$ $\qquad$ $\underline{S_3 = 5.300.- /}$

$S_4 = X$

$S_2 = Co\ (1 + n * i)$

$S_2 = 10.000\ (1 + 3 * \frac{0,12}{12})$

$S_2 = 10.000 * 1,03$

$\underline{S_2 = 10.300.- /}$

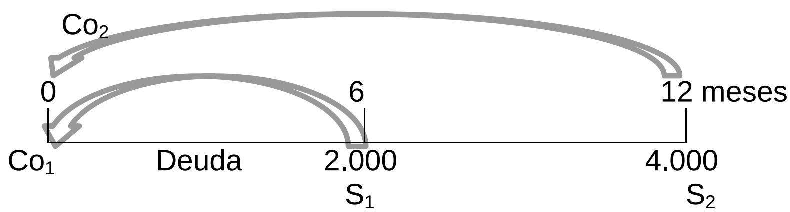
$S_1 + S_2 = S_3 + S_4$

$8.720 + 10.300 = 5.300 + X$

$X = 19.020 – 5.300$ $\qquad$ $\underline{X = 13.720.- /}$ Pago para liquidar toda la deuda

Ej. 36 Una empresa debe pagar Bs. 2.000 dentro de seis meses y Bs. 4.000 dentro de un año. El acreedor decide aceptar en éste momento un pago al 15% de interés anual en lugar de las dos deudas. Hallar el importe de pago único considerando la fecha focal el día de hoy.

Solución Pago = X
Único

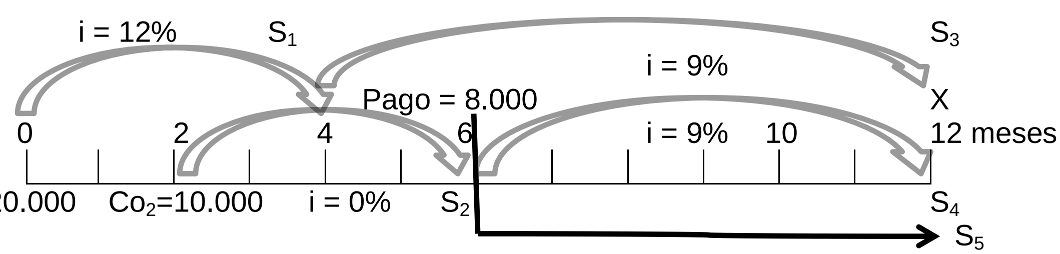


Operación de la deuda	"igual"	Operación de pago
$Co_1 + Co_2$	=	X
$\dfrac{S_1}{(1 + n * \frac{i}{12})} + \dfrac{S_2}{(1 + n * \frac{i}{12})}$	=	X
$\dfrac{2.000}{(1+6 * \frac{0,15}{12})} + \dfrac{4.000}{(1+1 * 0,15)}$	=	X
$\dfrac{2.000}{1,075} + \dfrac{4.000}{1,15}$	=	X
$1.860,47 + 3.478,26$	=	X

$\underline{X = 5.338,73 /}$ Es lo que paga la empresa el día de hoy.

Ej. 37 El Sr. Blanco adquiere un crédito de Bs. 20.000.- a cuatro meses, al 12% de interés; dos meses más tarde adquiere otro crédito por Bs. 10.000 a cuatro meses sin interés. Seis meses después de la fecha inicial, el Sr. Blanco conviene pagar a su acreedor Bs. 8.000 y pagar el saldo dentro de seis meses en lugar de las dos deudas anteriores al interés del 9% por la ampliación del tiempo (fecha focal un año). Hallar el importe del pago.

Solución:



Deudas= Co_1=20.000

Operación de deuda "igual" Operación de pago

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_5 + X$$

$$Co_1 (1 + n * i) + Co_2 (1 + n * i) + Co_3 (1 + n * i) + Co_4 (1 + n * i) = Co_5 (1 + n * i) + X$$

$$20.000 (1+4*\frac{0,12}{12}) * (1+8*\frac{0,09}{12}) + 10.000 (1+4*\frac{0,00}{12}) * (1+6*\frac{0,09}{12}) = 8.000 (1+6*\frac{0,09}{12}) + X$$

$$20.000 * (1,04) * (1,06) + 10.000 * (1) * (1,045) = 8.000 (1,045) + X$$

$$22.048 + 10.450 = 8.360 + X$$

$$X = 32.498 – 8.360$$

X = 24.138 / Pago al final del año.

7. APLICACIONES A INTERES SIMPLE

Se aplican en:

a) cuentas de ahorro y
b) cuenta corriente

En ambos casos el procedimiento es el mismo

a) cuenta de ahorro

Sean: s , s , s , s , ...s los distintos saldos
y. n, n, n, n,.....n sus tiempos de permanencia
Si la tasa de interés es: "i." Los intereses serán:

s n i, s n i, s n i. …..s n i.

Por tanto el interés total

I = s n i. + s n i. + s n i. +. ….. +s n i

I = i. (s n + s n +…..+ s n)

$$\boxed{I = \frac{i.}{360} s. n.}$$

Ej 38 Cerrar al 30/06/11 la cta. del Sr. Carlos Tebes si la tasa de interés que paga el banco es del 9% anual y cuyo movimiento es el siguiente:

- saldo 01/01/11 $3500
- deposito 20/01/11 $1000
- retiro 24/01/11 $1500
- deposito 05/02/11 $2000
- retiro 15/03/11 $1500
- deposito 20/04/11 $2800
- retiro 15/05/11 $2000
- deposito 05/06/11 $1000

Solución:

Fecha	Detalle	DEBE Retiros	HABER Depósitos	SALDO sr	Días nr	sr * nr
01-01-11	Saldo 31/12/10			3500	20	70000
20-01-11	DEPOSITO		1000	4500	4	18000
24-01-11	RETIRO	1500		3000	12	36000
05-02-11	DEPOSITO		2000	5000	38	190000
15-03-11	RETIRO	1500		3500	36	126000
20-04-11	DEPORITO		2800	6300	25	157500
15-05-11	RETIRO	2000		4300	21	90300
05-06-11	DEPOSITO		1000	5300	25	132500
30-06-11	Interés		205,08	5505.08	∑ (sr nr)	820300

$$I = \frac{0.09}{360} * 820300 \quad => \quad \underline{I = 205.08 /}$$

Ej 39 ¿Cuál es el saldo al 31 de mayo en una cuenta de ahorro si el banco carga el 30% de interés simple anual y la cuenta tiene los siguientes movimientos?:

-	Apertura	02/05/11	Bs. 20.000
-	retiro	10/05/11	Bs. 5.000
-	deposito	16/05/11	Bs. 10.000
-	retiro	20/05/11	Bs. 22.000
-	deposito	27/05/11	Bs. 7.000

Solución:

Fecha	Detalle	DEBE Retiros	HABER Depósitos	SALDO sr	Días nr	sr * nr
02-05-11	Apertura			20000	8	160000
10-05-11	RETIRO	5000		15000	6	90000
16-05-11	DEPOSITO		10000	25000	4	100000
20-05-11	RETIRO	22000		3000	7	21000
27-05-11	DEPOSITO		7000	10000	4	40000
31-05-11	Interés				∑ (sr nr)	411000

$$I = \frac{0.30}{360} * 411000 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\mathbf{I = 342.50 /}}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Escribir en decimales los siguientes porcentajes:

Porcentaje	Decimal (tanto por uno)
2%	
9%	
15%	
2,5%	
12,5%	
24%	

2. Hallar el interés del 5% de Bs. 30.000.- por un tiempo de cinco años
3. Hallar el interés de un capital de Bs. 4.000 por un tiempo de 15 meses al 12% anual
4. El 13 de febrero se obtiene un préstamo de Bs. 22.000.- al interés del 15%. Hallar el interés que será pagado el 23 de junio del mismo año.
5. El 1º de julio el Sr. Morales realiza la apertura de una cuenta corriente con Bs. 12.000 que abona el 15% interés anual. Determinar el importe que tiene en la cuenta al 31 de julio si durante el mes se ha realizado los siguientes movimientos.

8 de julio	retira	Bs. 4.000
15 de julio	deposita	Bs. 10.000
21 de julio	retira	Bs. 5.000
27 de julio	retira	Bs. 8.000

6. Calcular el capital invertido al 18% anual de interés simple durante 15 meses, sabiendo que durante ese tiempo ha generado un interés de Bs. 1.125
7. ¿En qué tiempo un capital de Bs. 6.000 genera un interés de Bs. 150 a la tasa de interés simple del 18%?
8. Un préstamo de Bs. 18.000 por un tiempo de cinco meses genera un interés de Bs. 900 ¿A qué tasa de interés simple se ha prestado?.

9. Hallar el valor del capital que en 6 ¼ años, produce un interés de Bs. 6.875 al interés del 5,5% trimestral.
10. Si las 3/4 partes de un capital producen Bs. 3.900 de interés en 8 meses y 20 días al 18% anual. Hallar el importe del capital mencionado.
11. Determinar tiempo aproximado y exacto.
    a) Entre el 12 de febrero y 18 de agosto del año 2011
    b) Entre el 15 de diciembre del 2011 al 18 de marzo de 2012
12. El 12 de febrero se obtiene un préstamo de Bs. 50.000 al interés del 24% anual. Hallar el interés ordinario y exacto si el capital fue devuelto el 18 de agosto del mismo año.
13. Calcular el monto que produce un capital de Bs. 5.000 depositado durante nueve meses al 15% anual.
14. Calcular el monto de una inversión de Bs. 15.000.- por un tiempo de 18 meses al 2% de interés mensual.
15. El 17 de julio se invierte Bs. 20.000 que genera un interés del 24% anual. Determinar el monto que tendrá al 15 de septiembre del mismo año.
16. ¿Qué suma se debe invertir al 8% para obtener en seis meses Bs. 2.080?
17. El día de hoy se suscribe un pagaré a 8 meses por Bs. 6.000 al 9% de interés. Determinar su valor dentro de tres meses considerando un rendimiento del 6%.
18. Usted adquiere una maquinaria a crédito con dos pagos de Bs. 5.000 y Bs. 8.000 que serán pagados dentro de tres y seis meses respectivamente. Hallar el precio al contado de la maquinaria si la tasa de interés es del 12% anual.
19. ¿A qué tasa anual se colocó un capital de Bs. 25.000.- que en 125 días se convirtió en Bs. 28.125?
20. Dos meses después de haber obtenido un préstamo, la señorita Blanca debe pagar exactamente Bs. 11.865 ¿Cuánto obtuvo en préstamo, si el pago que debe hacer incluye intereses del 30% anual?
21. Un capital de Bs. 8.000 y otro de Bs. 12.000 son colocados en diferentes entidades. El primer capital gana el 20% anual y permanece colocado durante nueve meses, el segundo capital se coloca al 24% anual durante un tiempo tal que en conjunto logran obtener un monto de Bs. 23.840. ¿Cuánto tiempo permaneció depositado el segundo capital?
22. ¿Cuál de las dos ofertas es más conveniente para el comprador de una casa, Bs. 6.752 iniciales y Bs. 10.600 dentro de seis meses o, Bs. 10.600 iniciales y Bs. 6.752 después de un año? Tomar el 12% de interés anual.
23. En la fecha usted deposita Bs. 60.000 en una cuenta de ahorro que paga el 1,5% de interés mensual. Transcurridos tres meses retira Bs. 20.000, seis meses después deposita Bs. 10.000, nueve meses más tarde retira Bs. 30.000. Determinar el saldo de la cuenta un año más tarde de haber realizado el primer depósito.
24. La empresa “Buen Precio” adquiere mercadería a crédito que será pagada en la forma siguiente: Bs. 50.000 a tres meses, Bs. 80.000 a seis meses y Bs. 60.000 a un año. Transcurridos nueve meses la empresa queda de acuerdo con su acreedor pagar en ese momento Bs. 40.000 y el saldo de la deuda dentro de un año y medio de haber contraído las obligaciones. Determinar el saldo a pagar dentro de un año y medio de haber contraído las obligaciones, considerando el primer año el 12% de interés anual y los últimos seis meses el 15% de interés anual.
25. Un empresario debe Bs. 6.000 con vencimiento en tres meses, Bs. 9.000 con vencimiento en cinco meses y Bs. 12.000 con vencimiento en nueve meses. Propone a su acreedor liquidar toda la deuda mediante dos pagos iguales con vencimiento en seis meses y 12 meses respectivamente. Determinar el importe de cada pago con un rendimiento del 9%, tomando como fecha focal al final del año.

TEMA No 3

DESCUENTO BANCARIO Y EQUILIBRIO FINANCIERO

1. INTRODUCCION

Existen operaciones financieras en las que el cálculo de los intereses se efectúa en base al valor final o monto en lugar de realizar éste cálculo sobre el valor actual. Cuando una persona o empresa toma dinero prestado, por lo general el interés o descuento se rebaja al inicio del periodo del préstamo en lugar de añadirlo al final.

En los documentos mercantiles como los pagarés con descuento simple, el valor nominal y el valor final al vencimiento son iguales.

2. DESCUENTO BANCARIO

Desde tiempos remotos, los prestamistas han acostumbrado cobrar los *intereses por adelantado* sobre el valor de los pagarés, calculándolos sobre el valor anotado en dichos documentos. Esto, además de permitir al prestamista disponer de inmediato del dinero correspondiente a los intereses, le da un mayor rendimiento que la tasa señalada en la operación.

El descuento bancario es el que se utiliza en todas las operaciones comerciales y, por ello, al hablar de descuento, se entiende que es el descuento bancario, salvo que se exprese como descuento racional o de otra forma convencional.

a) **Valor Nominal de un pagaré:** El valor nominal de un pagaré es el que está inscrito en la obligación, para el comercio se trata del capital. Si el pagaré no gana intereses, el valor nominal indica la cantidad que debe pagarse en la fecha de vencimiento señalada.
b) **Descontar un Pagaré:** Es la acción de recibir o pagar hoy un dinero, a cambio de una suma mayor comprometida para fecha futura, bajo las condiciones convenidas en el pagaré. Al referirse a la operación, el término descontar lo usan tanto el prestatario como el prestamista.
Un pagaré como un bien mobiliario puede ser vendido, es decir descontado, una o más veces antes de la fecha de su vencimiento y cada comprador descuenta el pagaré por el tiempo que falta para su vencimiento. Cuando la operación se efectúa entre bancos toma el nombre de ***redescuento*.**
c) **Descuento:** Es la diferencia establecida entre el valor nominal y el valor que se recibe, al momento de descontar el pagaré.
d) **Valor efectivo o líquido de un pagaré:** Es el valor nominal menos el descuento. Es el valor en dinero que se recibe en el momento de descontar la obligación o, en otras palabras el valor actual o presente con descuento bancario.
e) **Tipo o tasa de descuento:** Es el tanto por ciento de descuento, o sea, un porcentaje del valor nominal que deduce el prestamista al descontar el pagaré.
f) **Plazo:** Es el término que se utiliza para expresar el periodo de duración del préstamo. Los pagarés son obligaciones a corto plazo y el descuento bancario simple nunca se efectúa para periodos mayores de un año.

El descuento bancario es el interés anticipado que se paga por un determinado tiempo y calculado a una cierta tasa de interés.

2.1 Formulación:

$$\boxed{\mathbf{Db = Cn * n * \frac{d}{360}}}$$

I = Co *n * i = **Db** = Cn * n * d

Donde:

Db = Descuento bancario
Cn, S = Valor final o monto final
n = Tiempo de vencimiento
d = tasa de interés de descuento

Ej. 1.- Hallar el descuento bancario correspondiente a la letra de cambio de Bs. 38.500 aceptada en fecha 15-07-2011 con vencimiento 10-01-2012. Si la tasa de descuento es del 28% anual.

Datos

Cn = Bs. 38.500
n = 179 Días
d = 0.28 anual
Db = .?

Cálculo de los días

15 jul/11= 16 días	Nov/11 = 30 días
Ago/11 = 31 días	Dic/11 = 31 días
Sept/11 = 30 días	Ene/12 = 10 días
Oct/11 = 31 días	**Total = 179 días**

Otra forma:

f I = 15-07-11
f f = 10-01-12

f f = 2012 – 1 – 10
f I = 2011 – 7 – 15
1 a – 6m – 5d
360 – 180 – 5 Días = 175 + 4 (por los meses Jul, ago, oct y dic)
Total = 179 Dias

Db = Cn (1 - n * d)

$$Db = 38.500\left(1 - 179 * \frac{0,28}{360}\right)$$

Db = 38.500 (0,860777777) **Db = 33.139,94 /**

Ej. 2.- Una letra de cambio mensual con Bs. 20.000 es aceptada en fecha 4-08-11 al 23% anual. Si el descuento bancario es de Bs. 2200. Hallar el tiempo de vencimiento.

Datos

Cn = Bs. 20.000
n =?
d = 0.23 anual
Db = 2.200
f I = 4-08-11

$$\boxed{n = \frac{Db}{Cn * \frac{d}{360}}}$$

$$\Rightarrow n = \frac{2.200}{20.000 * \frac{0,23}{360}}$$

$$n = \frac{2.200}{12,77778}$$

n = 172,17 días /

ó n = 172,17 ÷ 30 días => **n = 5,74 meses /**

Ej. 3.- A que tasa de intereses de descuento fue aceptada una letra de cambio con valor nominal de dólares 7.500 en fecha 7-08-11 con vencimiento el 15-12-11, si el descuento bancario es de dólares 825. Hallar la tasa de descuento correspondiente.

Datos

Cn = $us 7.500.- Db = $us. 825.- d = ? n = 130 días
fi = 07 – 08 – 2011 ff = 15 – 12 – 2011

Cálculo del tiempo:

ff = 2011 – 12 – 15
Menos fi = 2011 – 08 – 07
0 – 4 – 8 = 4 meses y 8 días

⇨ 0 + (4*30) + 8 + 2 (Ago y Oct)
⇨ 0 + 120 + 8 + 2 = **130 días**

$\boxed{\mathbf{d = \frac{Db}{Cn * n} * 360}}$ $\quad d = \frac{825}{7.500 * 130} * 360 \quad d = \frac{825}{975.000} * 360 \quad d = 0,3046 * 100$

d = 30,46 % anual/

2.2 CALCULO DEL VALOR EFECTIVO, VALOR FINAL, TIEMPO Y TASA DE DESCUENTO

El **valor efectivo o presente (Co)**, es la cantidad de dinero que recibe el prestatario en efectivo luego de firmar (aceptar) un efecto financiero cuyo valor nominal es mayor a la suma recibida. Resulta ser la diferencia entre el valor final y el descuento bancario, es decir:

$$\boxed{\mathbf{Co = Cn - Db}}$$

Remplazando Db por la formula: $Co = Cn - (Cn * n * d)$

Factorizando Cn, se tiene: $\boxed{\mathbf{Co = Cn\ (1 - n * d)}}$

$$\boxed{\mathbf{Co = Cn * \left(1 - n * \frac{d}{360}\right)}}$$

$$\boxed{Cn = \frac{Co}{1 - n * \frac{d}{360}}} \qquad \boxed{n = \frac{Cn - Co}{Cn * \frac{d}{360}}} \qquad \boxed{d = \frac{Cn - Co}{Cn * n} * 360}$$

Ej. 4.- Una persona solicita un préstamo de Bs. 10.000 a nueve meses plazo a una institución financiera que aplica una tasa de descuento del 15%. ¿A cuánto ascenderá el descuento y que cantidad de dinero efectivo recibirá?

Solución

Cn = 10.000
n = 9 meses
d = 15% = 0,15
Db =?
Co =?

Db = Cn * n * d

$Db = 10.000 * 9 * \frac{0,15}{12}$

Db = 1.125 /

Co = Cn – Db

Co = 10.000 – 1.125

Co = 8.875 /

Ej. 5.- Un inversionista descuenta dos pagarés de un banco que cobra el 15% de interés simple por adelantado; el primero de valor nominal de Bs. 20.000 a 90 días y el segundo de Bs. 30.000 a 60 días. Hallar el importe total que recibe.

Solución:

Pagaré No. 1

Cn_1 = Bs. 20.000 n = 90 días
d = 15% ó 0,15 Co_1 =?
Co_1 = Cn (1 – n * d)
$Co_1 = 20.000\ (1 - 90 * \frac{0,15}{360})$
Co_1 = 20.000 (0,9625)
Co_1 = 19.250 /

Pagaré No. 2

Cn_2 = Bs. 30.000 n = 60 días
d = 15% ó 0,15 Co_1 =?
Co_2 = Cn (1 – n * d)
$Co_2 = 30.000\ (1 - 60 * \frac{0,15}{360})$
Co_2 = 30.000 (0,975)
Co_2 = 29.250 /

Co = Co_1 + Co_2
Co = 19.250 + 29.250
Co = 48.500 / Importe que recibe el inversionista.

Ej. 6.- Se firma un pagaré por Bs. 50.000.- al interés del 10% a 120 días, éste documento se negocia en un banco que descuenta un interés del 12% por adelantado. Hallar el valor líquido que entrega el banco.

Solución:
En éste caso, primero calculamos el valor final del pagaré a su fecha de vencimiento y, segundo se calcula el descuento sobre el monto determinado en la primera parte.

Valor final:

Co = 50.000 i = 10% ó 0,10
n = 120 días Cn =?

$$\mathbf{Cn = Co\,(1 + n * i)}$$
$$Cn = 50.000\left(1 + 120 * \frac{0,10}{360}\right)$$
$$Cn = 50.000\,(1,033333)$$
$$\underline{\underline{\mathbf{Cn = 51.666,67}}}\ /$$

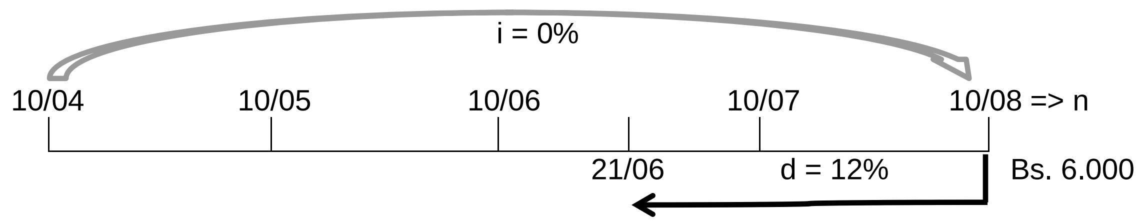
Descuento del pagaré:

Cn = d = 12% ó 0,12
n = 120 días Co =?

$$\mathbf{Co = Cn\,(1 - n * d)}$$
$$Co = 51.666,67\left(1 - 120 * \frac{0,12}{360}\right)$$
$$Co = 51.666,67\,(0,96)$$
$$\underline{\underline{\mathbf{Co = 49.600}}}\ /$$

Ej. 7.- Un pagaré de Bs. 6.000 sin intereses, firmado el 10 de abril a cuatro meses, es descontado el 21 de junio al 12%. Hallar el valor de la transacción

Solución:



$$\mathbf{Co = Cn\,(1 - n * d)}$$
$$Co = 6.000\left(1 - 50 * \frac{0,12}{360}\right)$$
$$Co = 6.000\,(0,983333)$$
$$\underline{\underline{\mathbf{Co = 5.900}}}\ /$$

Cálculo de tiempo del descuento:
junio = 9 días
julio = 31 días
ago = 10 dias
Total = 50 días /

Ej 8.- El Sr. Ruiz desea disponer mediante un crédito de Bs. 8.800.- en efectivo en éste momento y pagar la deuda dentro de un año, si el banco carga una tasa de descuento del 12% ¿Qué capital debe solicitar en préstamo?
Solución:

Co = 8.800 d = 12% n = 1 año Cn =_?

$$\mathbf{Cn = \frac{Co}{1 - n * d}} \qquad Cn = \frac{8.800}{1 - 1 * 0,12} \qquad Cn = \frac{8.800}{0,88} \qquad \underline{\underline{\mathbf{Cn = 10.000}}}\ /$$

Debe solicitar un préstamo de Bs. 10.000.-

Ej. 9.- Hallar la fecha en que se descuenta un pagaré de Bs. 4.000 con vencimiento el 25 de mayo, si se recibieron Bs. 3.955,55 con descuento bancario del 8%.

Solución:

n =? Cn = 4.000 Co = 3.955,55 d = 8%

$$\mathbf{n = \frac{Cn - Co}{Cn * d}} \qquad n = \frac{4.000 - 3.955,55}{4.000 * \frac{0,08}{360}} \qquad n = \frac{44,45}{0,889} \qquad \underline{\underline{\mathbf{n = 50\ días}}}\ /$$

Cálculo de la fecha

Mayo = 25 días
Abril = 25 días
Total = 50 días
El pagaré fue descontado el 5 de abril (30 días de abril – 25 días de abril = 5)

Ej 10.- Un pagaré firmado por Bs. 20.000.- es vendido tres meses antes de la fecha de vencimiento en Bs. 19.100.- Hallar la tasa de descuento aplicada en la transacción.

Solución:

Cn = 20.000   n = 3 meses   Co = 19.100   d =?

$$d = \frac{Cn - Co}{Cn * n} \qquad d = \frac{20.000 - 19.100}{20.000 * 3} \qquad d = \frac{900}{60.000} \qquad \underline{\mathbf{d = 0,015 \text{ mensual /}}}$$

La tasa de descuento aplicada es de 1,5% mensual
La tasa de descuento anual es (0,015 * 12) = 0,18 anual
La tasa de descuento anual es 18%

Ej. 11.- Un estudiante requiere para conocer las cataratas del Iguazú, de dólares 2.500 en efectivo, si el banco cobra el 18% anual. ¿Por cuanto deberá firmar una letra de cambio en fecha 15-08-11 con el vencimiento al 31-03-12?.

Solución:

Co = $ 2.500   d = 18%   n = 229 días   Cn =_?

Cálculo del tiempo:

15 Ago/11	= 16 días
Septiembre	= 30 d
Octubre	= 31 d
Noviembre	= 30 d
Diciembre	= 31 d
Enero/12	= 31 d
Febrero	= 29 d
Marzo	= 31 d
Total	**= 229 días**

Cálculo del valor final:

$$Cn = \frac{Co}{1 - n * d}$$

$$Cn = \frac{2.500}{1 - 229 * \frac{0,18}{360}}$$

$$Cn = \frac{2.500}{0,8855}$$

$$\underline{\mathbf{Cn = 2.823,26 /}}$$

Debe firmar la letra por $us. 2.823,26

Ej. 12.- ¿A qué la tasa de descuento fue aceptado una letra de cambio por Bs.15.000 en fecha 28-08-11 con el vencimiento al 4-01-12 si se recibe en efectivo por Bs.13.400?.

Solución:

Cn = 15.000   n = 129 días   Co = 13.400   d =?

Cálculo del tiempo:

28 Ago/11	= 03 días
Septiembre	= 30 d
Octubre	= 31 d
Noviembre	= 30 d
Diciembre	= 31 d
Enero/12	= 04 d
Total	**= 129 días**

Cálculo de la tasa de descuento:

$$d = \frac{Cn - Co}{Cn * n}$$

$$d = \frac{15.000 - 13.400}{15.000 * \frac{129}{360}}$$

$$d = \frac{1.600}{5.375} \qquad \underline{\mathbf{d = 0,2977 \text{ anual /}}}$$

$$d = 0,2977 * 100 \qquad \underline{\mathbf{d = 29,77 \text{ \% anual}}}$$

3 EQUIVALENCIA ENTRE LA TASA DE INTERÉS Y LA TASA DE DESCUENTO BANCARIO

El valor actual de un capital calculado a una tasa de descuento dado, es menor que el valor actual basado en una tasa de interés de igual monto. Para poder efectuar comparaciones, es necesario poder determinar la tasa de interés que sea equivalente a la tasa de descuento dada. "*Una tasa de descuento y una tasa de interés son equivalentes, si ambas tasas proporcionan el mismo valor actual aplicado sobre un mismo capital de vencimiento futuro dado*".

Sea:

$$Co = \frac{Cn}{1 + n * i} \qquad\qquad Co = Cn\,(1 - n * d)$$

Igualando los segundos miembros:

$$\frac{Cn}{1 + n * i} = Cn\,(1 - n * d)$$

Dividiendo ambos miembros entre Cn:

$$\frac{1}{1 + n * i} = 1 - n * d$$

Invirtiendo ambos miembros:

$$1 + n * i = \frac{1}{1 - n * d}$$

Restando 1 ambos miembros:

$$n * i = \frac{1}{1 - n * d} - 1 \quad \Rightarrow \frac{1 - 1\,(1 - n * d)}{1 - n * d}$$

$$n * i = \frac{1 - 1 + n * d}{1 - n * d} \quad \Rightarrow \frac{n * d}{1 - n * d}$$

Dividiendo por n ambos miembros:

$$\boxed{i = \frac{d}{1 - n * d}} \qquad\qquad \boxed{d = \frac{i}{1 + n * i}}$$

Fórmula que permite hallar *i* conociendo *d* — Fórmula que permite hallar *d* conociendo *i*

Ej. 13.- Utilizando la relación anterior, calcular la tasa de interés simple "i" equivalente al tipo de descuento bancario del 12%.

a) 360 días, b) 120 días, c) 60 días, antes de la fecha de vencimiento.

Solución:

a) d= 12% n= 360d

$$i = \frac{d}{1 - n * d}$$

$$i = \frac{0,12}{1 - 360 * \frac{0,12}{360}}$$

$$i = \frac{0,12}{0,88}$$

i =0,1364

Tasa d' interés es 13,64% a.

b) d= 12% n= 120d

$$i = \frac{d}{1 - n * d}$$

$$i = \frac{0,12}{1 - 120 * \frac{0,12}{360}}$$

$$i = \frac{0,12}{0,96}$$

i =0,125

Tasa de interés es 12,5% a.

c) d= 12% n= 60d

$$i = \frac{d}{1 - n * d}$$

$$i = \frac{0,12}{1 - 60 * \frac{0,12}{360}}$$

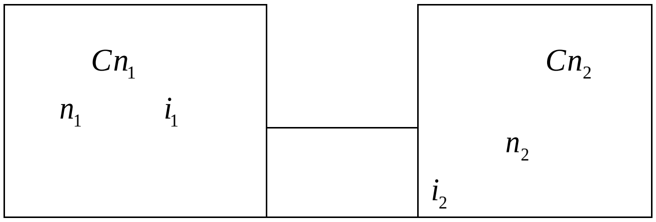
$$i = \frac{0,12}{0,98}$$

i = 0,1224

Tasa de interés es 12,24% a.

4 EQUIVALENCIA FINANCIERA:

4.1 CAMBIO DE UN DOCUMENTO POR OTRO



Principio: Los documentos son equivalentes en una determinada fecha antes de su vencimiento siempre y cuando sus valores efectivos son iguales.

Si $Co_1 = Co_2$

⇨ $Co_1 = Cn_1 (1 – n_1 * d_1)$ $Co_2 = Cn_2 (1 – n_2 * d_2)$

⇨ $Cn_1 (1 – n_1 * d_1) = Cn_2 (1 – n_2 * d_2)$

Despejando Cn_2

$$\boxed{Cn_2 = \frac{Cn_1 (1 - n_1 * d_1)}{(1 - n_2 * d_2)}}$$ **Formula de la equivalencia financiera**

Ej. 14.- Un comerciante debe cubrir una letra de cambio de $ 7.800 en efectivo el 20-10-11. Sin embargo estimando que no podrá cubrir dicha obligación en la fecha prevista, en fecha 20-08-11 cambia con su acreedor el efecto financiero por otro que tenga como vencimiento el 15-01-12. Si la tasa de interés que interviene en los cálculos es del 22% anual.

a) Hallar el valor nominal del documento
b) A manera de prueba hallar la tasa de interés
c) Si la tasa de interés del primer documento es del 18% anual. Hallar la tasa de interés del segundo documento

Solución:

a) Cn_1 = $ 7.800.- n_1 = (Del 20-08 al 20-10) = 61 días i = 22% anual Cn_2 =?
n_2 = (Del 20-08-11 al 15-01-12) = 148 días

$$Cn_2 = \frac{Cn_1 (1 - n_1 * d_1)}{(1 - n_2 * d_2)}$$

$$Cn_2 = \frac{7.800 (1 - 61 * 0,22 / 360)}{(1 - 148 * 0,22 / 360)} \qquad Cn_2 = \frac{7.800 (0,962722222)}{0,909555555} \qquad Cn_2 = \frac{7.509,23}{0,9096} \qquad \underline{\underline{\mathbf{Cn_2 = 8.255,94\ /}}}$$

b) Cn_1 = $ 7.800.- n_1 = (Del 20-08 al 20-10) = 61 días i =? Cn_2 = 8.255,94

n_2 = (Del 20-08-11 al 15-01-12) = 148 días

$$\mathbf{i = \frac{Cn_2 - Cn_1}{Cn_2 * n_2 - Cn_1 * n_1} * 360} \qquad \text{Si } i_1 = i_2$$

i = <u>8.255,94 – 7.800</u> * 360 i = <u>455.94</u> * 360 i = <u>164.138,40</u>

8.255,94 * 148 – 7.800 * 61 1.221.879,12 – 475.800 746.079,12

i = 0.2200 / ó **i = 22% anual /**

c) Cn_1 = $ 7.800.- n_1 = (Del 20-08 al 20-10) = 61 días i_1 =18% Cn_2 = 8.255,94

n_2 = (Del 20-08-11 al 15-01-12) = 148 días

$$i_2 = \frac{Cn_2 - Cn_1 (1 - n_1 * d_1)}{Cn_2 * n_2} * 360$$

$$i_2 = \frac{8.255,94 - 7.800 (1 - 61 * 0,18/360)}{8.255,94 * 148} * 360 \quad i = \frac{8.255,94 - 7.562,10}{1.221.879,12} * 360 \quad i = \frac{249.782,40}{1.221.879,12}$$

i = 0.2044 / ó **i = 20,44% anual /**

4.2 DOCUMENTO UNICO

Dos o más documentos son equivalentes a un solo documento único siempre y cuando la suma de sus valores efectivas es igual al valor efectivo del documento único en una determinada fecha de sus vencimiento.

$$Co_1 + Co_2 + Co_3 + ... + Co_n = Co$$

Co = valor efectivo del documento único
Co_n = valor efectivo del documento
r = 1,2,3,…….,n
n = vencimiento común (vencimiento del documento único)
nr = vencimiento del documento
i = tasa de interés

$$\boxed{Co_1 = Cn_1\left(1 - n\frac{i}{360}\right)}$$

$$Cn\left(1 - n\frac{i}{360}\right) = Cn_1\left(1 - n_1\frac{i}{360}\right) + Cn_2\left(1 - n_2\frac{i}{360}\right) + ... + Cn_n\left(1 - n_n\frac{i}{360}\right)$$

$$Cn_1 - Cn_1n_1\frac{i}{360} + Cn_2 - Cn_2n_2\frac{i}{360} + ... + Cn_n - Cn_nn_n\frac{i}{360}$$

$$\sum_{r=1}^{m} Cnr \frac{i}{360}\sum_{r=1}^{m} Cnr.nr = Cn\left(1 - n\frac{i}{360}\right)$$

a) Valor nominal de documento único

$$\boxed{Cn = \frac{\sum Cnr - \frac{i}{360}\sum Cnr * nr}{1 - n\frac{i}{360}}}$$

$$\sum Cnr - \frac{i}{360}\sum Cnr.nr = Cn - cn\frac{i}{360}$$

$$Cn.n\frac{i}{360} = Cn = \sum Cnr + \frac{i}{360}\sum Cnr.nr$$

b) Vencimiento común

$$\boxed{n = \frac{Cn - \sum Cnr + \frac{i}{360}\sum Cnr.nr}{Cn\frac{i}{360}}}$$

c) Vencimiento Medio:

$$Cn = \sum Cnr$$

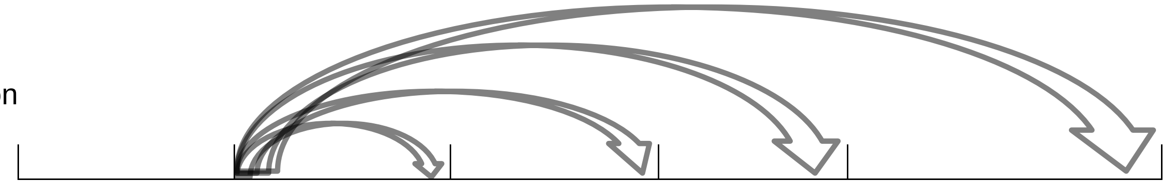
$$\boxed{\tilde{n} = \frac{\sum Cnr.nr}{\sum Cnr}}$$

Ej. 15.- Un industrial debe cubrir las siguientes obligaciones:
Bs 4.500 al 20 – 10 – 11; Bs 3.800 al 10 – 11 - 11
Bs 6.000 al 23 – 12 – 11: Bs 7.000 al 15 – 02 – 12

Sin embargo, estima que no podrá cubrir en las fechas previstas y conviene cambiar los efectivos financieros que tengan como vencimiento: 31 – 12 – 11 si la tasa de interés aplicada entre cálculos es del 22% anual.

a) Hallar el valor nominal del documento único
b) A manera de prueba hallar el vencimiento común.
c) Si la tasa de interés aplicado al documento único es 28% anual. Hallar la tasa de interés de los documentos en conjunto.

Solución



0	20-10-11	10-11-11	23-12-11	31-12-11	15-02-12
Deudas	Bs. 4.500	Bs. 3.800	Bs. 6.000		Bs. 7.000
	Oct = 11	n_1 = 21	n_2 = 64	n_3 = 72	
	Nov = <u>10</u>	Nov = 20	Dic = <u>8</u>	Ene = 31	
	n_1 = 21	Dic = <u>23</u>	**n_3 = 72**	Feb = <u>15</u>	

n_2 = 64 **n_4 = 118**

a) Hallar valor nominal del documento único

R	Cnr	nr	Cnr * nr
1	4.500	21	94500
2	3.800	64	243200
3	6.000	72	432000
4	7.000	118	826000
Total	21.300		1'595.700

$$Cn = \frac{\sum Cnr - \left[\frac{i}{360} * \sum Cnr * nr\right]}{1 - n * \frac{i}{360}}$$

$$Cn = \frac{21.300 - \left(\frac{0,22}{360} * 1'595.700\right)}{1 - 72 * \frac{0,22}{360}} \qquad Cn = \frac{21.300 - 975.15}{0,956} \qquad \underline{\underline{Cn = 21.260,30\ /}}$$

b) A manera de prueba hallar el vencimiento común.

$$n = \frac{Cn - \sum Cnr + \left[\frac{i}{360} * \sum Cnr * nr\right]}{Cn * \frac{i}{360}}$$

$$n = \frac{21.260,30 - 21.300 + \left[\frac{0,22}{360} * 1'595.700\right]}{21.260,30 * \frac{0,22}{360}} \qquad n = \frac{21.260,30 - 21.300 + 972,15}{12.99}$$

$$n = \frac{932,45}{12,99} \qquad \underline{\underline{n = 71,78\ /}} \quad ó \quad \underline{\underline{n = 72\ /}}$$

c) Si la tasa de interés aplicado al documento único es 28% anual. Hallar la tasa de interés de los documentos en conjunto.

Sea:

$$\frac{i}{360}\sum Cnr.n = \sum Cnr - Cn\left(1 - n\frac{i}{360}\right)$$

Despejando i:

$$\boxed{i = \frac{\sum Cnr - Cn(1 - n\frac{i}{360})}{\frac{\sum Cnr.nr}{360}}}$$

$$i = \frac{21.300 - 21.260,30\left(1 - 72 * \frac{0,28}{360}\right)}{} \qquad i = \underline{21.300 - 21.260.30*(0,944)} \qquad i = \underline{21.300 - 20.069,72}$$

$$\frac{1'595.700}{360} \qquad i = \frac{1.230,.28}{4.432,50} \qquad \frac{4.432,50}{4.432,50}$$

i = 0,2776 ó

i = 27,76% /

4.3 PAGOS PARCIALES

En las operaciones financieras se presentan casos en los que una obligación puede ser cumplida, mediante pagos parciales dentro el periodo o plazo de la obligación, en lugar de un solo pago en la fecha de vencimiento. Para el tratamiento de los pagos parciales existen dos métodos que se utilizan con mayor frecuencia, la regla comercial y la regla americana o de saldos insolutos.

4.3.1 Regla Comercial: El interés se calcula sobre la deuda original y sobre cada uno de los pagos parciales a la fecha de vencimiento. La cantidad que se pagará en la fecha de vencimiento para liquidar la obligación, es la diferencia entre el valor futuro de la obligación y la suma de los valores futuros de los pagos parciales.

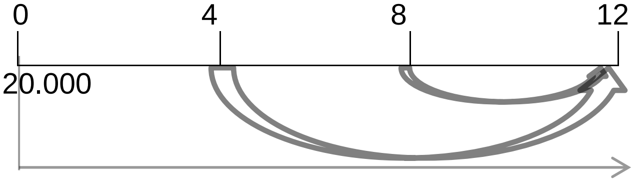
Estos casos, también pueden resolverse mediante ecuaciones de valores equivalentes considerando la fecha de vencimiento como fecha focal.

Ej. 16.- Una deuda de Bs. 20.000.- a un año plazo con interés del 15%, es pagada por el deudor con pagos parciales, la primera de Bs. 8.000.- en cuatro meses y la segunda de Bs. 6.000.- en ocho meses. Determinar el saldo de la deuda a pagar en la fecha de vencimiento.

Solución: i = 15% Pagos = Bs. 8.000 Bs. 6.000 Cn_4 = X

0 4 8 12 = n

Deuda = Bs. 20.000



Cn_2

Cn_1

Cn_3

Sea:

Operación de deuda = Operación de Pago

$Cn_3 = Cn_1 + Cn_2 + Cn_4$

Reemplazando valores:

$$Co_3\,(1 + n_3 * i) = Co_1\,(1 + n_1 * i) + Co_2\,(1 + n_2 * i) + X$$

$$20.000\,(1 + 1 * 0{,}15) = 8.000\left(1 + 8 * \frac{0{,}15}{12}\right) + 6.000\left(1 + 4 * \frac{0{,}15}{12}\right) + X$$

$$23.000 = 8.800 + 6.300 + X$$

$$23.000 - 15.100 = X$$

X = 7.900 / Saldo a pagar en la fecha de vencimiento

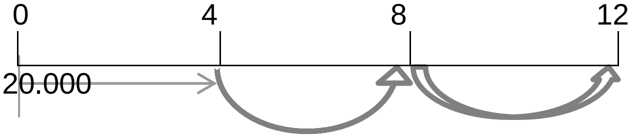
4.3.2 Regla Americana (Saldos insolutos): Permite descontar el pago parcial del saldo o monto de la deuda a la fecha de pago. Los pagos parciales deben ser mayores que los intereses de la deuda a la fecha de pago.

Ej. 17.- (Anterior) Una deuda de Bs. 20.000.- a un año plazo con interés del 15%, es pagada por el deudor con pagos parciales, la primera de Bs. 8.000.- en cuatro meses y la segunda de Bs. 6.000.- en ocho meses. Determinar el saldo de la deuda a pagar en la fecha de vencimiento.

Solución: i = 15% Pagos = Bs. 8.000 Bs. 6.000

0 4 8 12 = n

Deuda = Bs. 20.000



Cn_1 Cn_2 Cn_3

Valor de la deuda a 4 meses, fecha del primer pago parcial:

$Cn_1 = 20.000\,(1 + 4 * \frac{0,15}{12}) \quad => \quad Cn_1 = 21.000.-$

Deuda a la fecha de pago	= 21.000.-
Primer pago parcial	= (8.000.-)
Saldo de la deuda	= **13.000.-**

Valor de la deuda a 8 meses, fecha del segundo pago parcial:

$Cn_2 = 13.000\,(1 + 4 * \frac{0,15}{12}) \quad => \quad Cn_2 = 13.650.-$

Deuda a la fecha de pago	= 13.650.-
Segundo pago parcial	= (6.000.-)
Saldo de la deuda	= **7.650.-**

Valor de la deuda a 12 meses, fecha de vencimiento:

$Cn_3 = 7.650\,(1 + 4 * \frac{0,15}{12}) \quad => \quad$ **$Cn_3 = 8.032,50$ /** Saldo a pagar en la fecha de vencimiento

Los saldos a pagar en la fecha de vencimiento en los ejemplos 16 y 17 son diferentes. Se paga mayor interés según la regla americana. Esto se debe a que al aplicar ésta regla, el prestamista comienza a ganar intereses sobre los intereses capitalizados, en cada fecha de los pagos parciales.

4.4 VENTAS A PLAZOS

Es costumbre que en las transacciones comerciales, muchas ventas se efectúen a plazos, es decir, se recibe un pago inicial y el saldo se paga en una serie de cuotas iguales cada determinado tiempo.

Sobre el precio al contado, el comerciante carga una suma adicional por la venta a plazos; ésta suma adicional es por concepto de intereses sobre la deuda que contrae el comprador, para cubrir el mayor costo que representa la venta a plazos; éstos costos representan los gastos de contabilidad; cobranzas, gastos legales, castigo de deudas incobrables y otros.

Para el comprador el sobreprecio que paga son los intereses de la deuda por la compra a plazos.

Ej. 18.- Se vende un artefacto eléctrico con un valor de Bs. 13.000 mediante un pago inicial de Bs. 3.000 y cinco cuotas mensuales de Bs. 2.000 con un recargo del 2% mensual sobre saldos.

Solución:

Valor del artefacto eléctrico		Bs. 13.000.-
Pago Inicial		(Bs. 3.000.-)
Saldo		Bs. 10.000.-
Primera cuota	Bs. 2.000.-	
2% s/10.000	Bs. 200.-	
Importe del 1ª pago	Bs. 2.200.-	
Saldo		Bs. 8.000.-
Segunda cuota	Bs. 2.000.-	
2% s/8.000	Bs. 160.-	
Importe del 2ª pago	Bs. 2.160.-	
Saldo		Bs. 6.000.-
Tercera cuota	Bs. 2.000.-	
2% s/6.000	Bs. 120.-	
Importe del 3ª pago	Bs. 2.120.-	
Saldo		Bs. 4.000.-
Cuarta cuota	Bs. 2.000.-	
2% s/4.000	Bs. 80.-	
Importe del 4ª pago	Bs. 2.080.-	

Saldo		Bs. 2.000.-
Quinta cuota	Bs. 2.000.-	
2% s/2.000	Bs. 40.-	
Importe del 5ª pago	Bs. 2.040.-	
Saldo		**Bs. 0.-**

4.5 TASA DE INTERES EN VENTAS A PLAZOS

Para calcular la tasa de interés anual cargada en la transacción, es necesario determinar algunos conceptos y dar algunas definiciones.

B = saldo insoluto = valor de contado – pago inicial
I = cargo adicional o intereses
n = número de pagos excluyendo el pago inicial
R = valor del pago periódico
m = número de periodos o plazos contenidos en un año
i = tasa anual de interés expresada en tanto por ciento
$^n/_m$ =tiempo expresado en años
Por definición, I = R*n - B

a) **Tasa de interés según la regla comercial:** De acuerdo con la regla comercial para pagos parciales se escoge como fecha focal la fecha de vencimiento para la obligación. Para el caso de ventas a plazo, se trata de la fecha de pago para la última cuota de la compra a plazos.

B 0	1	2	n–2	n–1	n
Fecha focal	R	R	R	R	R

Cada periodo de pago es igual a $^1/_m$ año; el tanto por uno de interés en cada periodo es igual a $^1/_m$* i. El monto del saldo insoluto inicial y la suma de los montos de los pagos parciales, en la fecha focal deben ser iguales.

$$B\left(1+\frac{n}{m}*i\right) = R\left(1+\frac{n-1}{m}*i\right) + R\left(1+\frac{n-2}{m}*i\right) + \dots + R\left(1+\frac{2}{m}*i\right) + R\left(1+\frac{1}{m}*i\right) + R$$

$$B + B*\frac{n}{m}*i = n*R + R*\frac{i}{m}\left[(n-1)+(n-2)+\dots+2+1\right]$$

La expresión encerrada en el paréntesis es la progresión aritmética formada por los (n – 1) primeros números naturales y su suma es igual a "$\frac{n(n-1)}{2}$". Al sustituir, se tiene:

$$B + B*\frac{n}{m}*i = n*R + \frac{R(n-1)ni}{2m}$$

$$B*\frac{n}{m}*i - \frac{R(n-1)ni}{2m} = n*R - B$$ Reemplazamos I = n*R – B y operamos

$$[2nB - R(n-1)\,n]\,i = 2m\,I$$

$$i = \frac{2\,m\,I}{2nB - Rn^2 + Rn}$$ sustituyendo Rn = I + B

$$i = \frac{2\,m\,I}{2nB - (I + B)n + I + B} \qquad i = \frac{2\,m\,I}{2nB - In - nB + I + B} \qquad i = \frac{2\,m\,I}{nB + B - In + I}$$

$$\boxed{\mathbf{i = \frac{2\,m\,I}{B\,(n + 1) - I\,(n - 1)}}}$$

Ej. 19.- Un equipo de sonido tiene un precio de contado de Bs. 65.000.- se vende a plazos mediante un pago inicial de Bs. 12.000 y el saldo en seis cuotas mensuales de Bs. 10.000 cada uno. Calcular la tasa de interés cargada.

Solución:

Saldo Insoluto $B = 65.000 - 12.000 \Rightarrow B = 53.000$
Cargo por intereses $I = Rn - B \Rightarrow I = 6\,(10.000) - 53.000 \Rightarrow I = 7.000$
Número de pagos $n = 6$;
Periodo de pago $= 1$ mes, de donde $m = 12$

Al sustituir se tiene

$$\mathbf{i = \frac{2\,m\,I}{B\,(n + 1) - I\,(n - 1)}} \qquad i = \frac{2 * 12 * 7.000}{53.000(6 + 1) - 7.000(6 - 1)} \qquad i = \frac{168.000}{371.000 - 35.000}$$

$$i = \frac{168.000}{336.000} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{i = 0{,}50\ /}}} \quad \text{ó} \quad \underline{\underline{\mathbf{i = 50\ \%\ /}}}$$

Ej. 20.- En la venta a plazos del ejemplo anterior, el comerciante desea cargar intereses a la tasa de interés del 30%. Calcular:

a) El cargo que debe adicionar al precio de contado, para obtener su precio de venta a plazos.
b) La cuota mensual

Solución:

a) $I = ?$, $i = 30\%$

$$\mathbf{i = \frac{2\,m\,I}{B\,(n + 1) - I\,(n - 1)}} \qquad 0{,}30 = \frac{2 * 12 * I}{53.000(6 + 1) - I(6 - 1)} \qquad 0{,}30 = \frac{24\,I}{371.000 - 5\,I}$$

$$0{,}30\,(371.000 - 5\,I) = 24\,I \Rightarrow 111.300 - 1{,}5\,I = 24\,I \Rightarrow 111.300 = 24\,I + 1{,}5\,I$$

$$25{,}5\,I = 111.300 \Rightarrow I = \frac{111.300}{25{,}5} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{I = 4.364{,}70\ /}}}$$

b) Valor de la cuota $= \dfrac{B + I}{n} \qquad \dfrac{53.000 + 4.364{,}70}{6} = \underline{\underline{\mathbf{9.560{,}78\ /}}}$

b) **Tasa de descuento bancario en ventas a plazos:** Considerando el saldo insoluto *B* como el valor efectivo o actual de los pagos futuros o cuotas de las ventas a plazos, se tienen *n* pagos de valor *R*, en periodos iguales a $^1/_m$ de año, a la tasa de descuento *d*.

B					
0	1	2	n–2	n–1	n
Fecha focal	R	R	R	R	R

$$B = R\left(1 - \frac{1}{m} * d\right) + R\left(1 - \frac{2}{m} * d\right) + \ldots\ldots + R\left(1 - \frac{n-1}{m} * d\right) + R\left(1 - \frac{n}{m} * d\right)$$

$$B = nR - \frac{R}{m} * d\,[1 + 2 + \ldots\ldots + (n-1) + n]$$

La suma de los términos encerrados en el paréntesis es igual a: $\frac{n(n+1)}{2}$

$$B = nR - \frac{R}{m} * d\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$\frac{R}{m} * d\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = nR - B = I$$ Cargo adicional por ventas a plazos

despejando d => $$\boxed{\mathbf{d = \frac{2\,m\,I}{Rn\,(n+1)}}}$$

Ej. 21.- Un equipo de sonido tiene un precio de contado de Bs. 65.000.- se vende a plazos mediante un pago inicial de Bs. 12.000 y el saldo en seis cuotas mensuales de Bs. 10.000 cada uno. Calcular la tasa de descuento bancario en la venta a plazos.

Solución:

Pagos R =10.000
Cargo por intereses I = Rn – B => I = 6 (10.000) – 53.000 => I = 7.000
Número de pagos n = 6;
Periodo de pago = 1 mes, de donde m = 12

$\mathbf{d = \frac{2\,m\,I}{Rn\,(n+1)}}$ $d = \frac{2 * 12 * 7.000}{10.000 * 6\,(6+1)}$ $d = \frac{168.000}{420.000}$ **d = 0,40 /** **ó** **d = 40% /**

Ej. 22.- En el ejemplo 21 el comerciante desea cargar la tasa de descuento del 24%.Calcular el cargo que debe adicionar al precio de contado, para obtener su precio de venta a plazos.

Solución:

d = 24%; m = 12; R = 10.000; n = 6 I =?

$\mathbf{d = \frac{2\,m\,I}{Rn\,(n+1)}}$ $0{,}24 = \frac{2 * 12 * I}{10.000 * 6\,(6+1)}$ $0{,}24 = \frac{24\,I}{420.000}$ 24 I = 420.000 * 0,24

$I = \frac{100.800}{24}$ **I = 4.200 /**

4.6 PAGOS DESPUES DE LA FECHA DE VENCIMIENTO

Cuando un pagaré no se cancela en la fecha señalada para su vencimiento, comienza a generar intereses llamados *intereses de mora*, los cuales se calculan con base en el valor nominal por el tiempo que se retrasa el pago, a una tasa de interés fijada al firmar el pagaré. Los intereses de mora se calculan mediante la aplicación de las fórmulas ya estudiadas.

Ej. 19.- Calcular el valor líquido de un pagaré de Bs. 14.000.- cancelado 38 días después de su vencimiento, si los intereses de mora se fijaron en el 12%.

Solución:

En lenguaje bancario Cn = S = Valor líquido y Co = Valor Nominal

Co = VN = Bs. 14.000.- n = 38 días i = 12% Cn = VL =?

Cn = Co (1 + n * i)   Cn = 14.000 (1 + 38 * 0,12 / 360)   **Cn =14.177,33 /**

4.7 COMISIONES

Las comisiones son cantidades de dinero que se pagan o cobran por la prestación de un servicio. La comisión se expresa en tanto por ciento y en su valor no interviene el tiempo. De ésta manera, si para la venta de algún bien se conviene con el vendedor una comisión del 5%, esto significa que se le pagará la suma de cinco unidades de dinero por cada 100 unidades del valor de la venta.

4.8 DESCUENTOS COMERCIALES

En el comercio se acostumbra ofrecer una rebaja sobre el precio de lista por alguna razón, por ejemplo, promociones especiales de venta, compra al por mayor, pronto pago, etc.

Los descuentos como las comisiones se expresan en tanto por ciento y en su valor no interviene el tiempo.

Descuento = D = S*i

4.9 VALOR NETO DE UNA FACTURA

El valor neto de la factura es igual al valor facturado, menos el descuento.

Sean: Cn = S = Valor de la factura o importe facturado.
VN = Valor Neto de la factura
d = tanto por ciento de descuento
i = d / 100 tanto por uno de descuento

VN = S – D   => S – S*i
VN = S (1 – i)

Ej. 20.- Calcular el valor neto por pagar para cubrir una factura por valor de Bs. 7.000.-sobre la que se concede un descuento del 4%.

Solución:
VN =?   Cn = Bs. 7.000.-   i = 4%

VN = S (1 – i)   VN = 7.000 (1 – 0,04)   VN = 7.000 (0,96)   **VN = 6.720.- /**

4.10 DESCUENTO POR PRONTO PAGO

El comercio mayorista acostumbra ofrecer descuentos por pronto pago, que permiten al comprador escoger entre varias alternativas su forma de pagar, según el tiempo en que anticipen el pago sobre el plazo expresado en la lista de precios del mayorista. Si un mayorista indica sus precios con plazos de pago a 60 días, esto significa que el comprador queda obligado a pagar a los 60 días contados a partir de la fecha de la factura, sobre el precio facturado se ofrecen los descuentos por pronto pago. Se acostumbra indicar los descuentos por medio de fracciones, cuyo numerador señala el tanto por ciento de descuento y cuyo denominador se refiere al tiempo dentro del cual el comprador tiene la opción de pagar para tener derecho al descuento señalado por el denominador.

Ej. 21.- Un comerciante factura una mercancía por valor de Bs. 100.000 el 01 de marzo con las siguientes condiciones: neto a 60 días; $^4/_{30}$; $^6/_{15}$; 8% de contado.

Solución:

- Por pago de contado contra factura, se paga con el 8% de descuento o sea Bs. 92.000.-
- Por pago a 15 días de plazo, o sea el 15 de marzo, se paga la factura con el 6% de descuento, es decir Bs. 94.000.-
- Por pago a 30 días de plazo, o sea el 1º de abril se paga con el 4% de descuento, es decir Bs. 96.000

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un pagaré de Bs. 6.000a 10 meses plazo es descontado tres meses antes de su vencimiento a la tasa de descuento del 18%.Hallar el importe recibido.
2. Determinar el descuento bancario y el importe recibido de un pagaré de Bs. 4.000 con vencimiento a seis meses, si la tasa de descuento es del 12%.
3. Determinar la fecha en que se descuenta un pagaré de Bs. 10.000.- con vencimiento al 20 de julio, si se recibieron Bs. 9.500.- con un descuento bancario del 12%.
4. Una persona desea disponer mediante un crédito Bs. 8.000en efectivo en éste momento y pagarla deuda dentro de un año. Si el banco carga una tasa de descuento del 12% ¿Qué capital debe solicitar en préstamo?
5. Un pagaré a 120 días por Bs. 40.000.- al interés del 12% es descontado al 18%. Hallar el importe que recibe el banco.
6. Hallar la tasa *i* equivalente a una tasa de descuento *d*:
   a) 6% por dos meses b) 12% por nueve meses
7. El Banco FIE SA descuenta un pagaré de Bs. 30.000.- al 9%, 90 días antes de su vencimiento, pasados 30 días se redescuenta en otro banco a la tas del 12%. Calcular la utilidad del banco FIE.
8. Se adquiere a crédito un vehículo que tiene un valor de Bs. 30.000.-, que será pagado con tres cuotas trimestrales de Bs. 5.000.-; Bs. 8.000.- y Bs. 12.000.- respectivamente, el saldo al final del año con un interés del 6%. Determinar el saldo a pagar al final del año utilizando la regla comercial.
9. Resolver el problema ocho mediante la regla americana.
10. Una persona compra un vehículo con un costo de Bs. 25.000.- Paga al contado Bs. 10.000.- y compromete pagar el saldo con tres cuotas bimestrales de Bs. 5.000; con un interés del 18% sobre saldos. Determinar el importe de los pagos.
11. Una empresa debe al banco dos pagarés, el primero de Bs. 20.000.- con vencimiento al 30 de junio y el segundo de Bs. 15.000.- con vencimiento al 18 de agosto. El 20 de junio propone al banco reemplazar los dos pagarés por uno solo con vencimiento al 30 de septiembre del mismo año. Si la tasa de descuento es de 8%, calcular el valor del nuevo pagaré.
12. Un pagaré de Bs. 10.000.- firmado el 10 de abril al interés del 9% con vencimiento el 19 de julio es descontado el 30 de mayo al 10%. Hallar el importe de la transacción.
13. Se firma un pagaré por Bs. 20.000.- con un interés del 12% con vencimiento en fecha futura. Dos meses más tarde el pagaré es sujeto a descuento del 15%, en la operación recibe la cantidad de Bs. 20.140.-.Hallar el tiempo de vigencia del pagaré.
14. Hallar la tasa de interés simple i equivalente a la tasa de descuento bancario del 9%:
    a) 180 días; b) 90 días antes del vencimiento.
15. Una persona desea ganar el 12% de interés simple al descontar documentos. ¿Qué tasa de descuento debe utilizar si el periodo de descuento de los documentos es:
    a) 3 meses b) 120 días c) 6 meses d) 240 días
16. La empresa “Sajama” Ltda. Obtiene el 5 de febrero un préstamo de Bs. 60.000 al 18%. El 6 de mayo pagó Bs.20.000.- el 5 de julio pagó Bs. 10.000.- y el 24 de agosto pago Bs. 15.000.- Determinar el saldo a pagar el 13 de octubre del mismo año.
    a) Mediante la regla comercial b) Mediante la regla americana

17. Se compra una casa con un costo de Bs. 80.000.- a crédito. Se paga una cuota inicial de Bs. 30.000.- y dos pagos de Bs. 20.000.- a cuatro meses y ocho meses respectivamente. Hallar el saldo insoluto, al final del año al interés del 10% mediante la regla americana.
18. Una empresa compra un lote de 200 radios, cada radio cuesta Bs. 500. La compra se realiza aprovechando una serie de descuentos, por promoción 10%, por mayor 8% y por ser cliente antiguo 6%. Determinar el precio al que debe ofrecer cada radio para obtener una utilidad bruta del 30%.
19. Un importador de vehículos vende cada uno en Bs. 40.000.- al contado y la línea de crédito tiene el siguiente plan: cuota inicial Bs. 20.000.- y el saldo en cuatro pagos trimestrales de Bs. 5.000.- con recargo del 6% de interés sobre saldos insolutos. Calcular el importe de cada una de las cuatro cuotas.
20. Una empresa acepto un pagaré por Bs. 8.000.- con interés al 10% por 90 días. De inmediato fue descontado por un banco, quien pago el 12% ¿Cuánto recibió la empresa del banco?
21. Un inversionista presta una suma de dinero a un cliente mediante un pagaré cuyo valor nominal es de Bs.60.000.- con vencimiento a 150 días quien descuenta al 12% de interés por adelantado; 40 días después negocio el pagaré en un banco que descuenta el9% de interés por adelantado. Hallar
    a) La suma que recibe el cliente
    b) La suma que en la operación comercial gana el inversionista.
    c) La suma que descuenta el banco.
22. a) Calcular el valor efectivo que se recibe al descontar un pagaré de Bs. 5.000.-; 120 días antes del vencimiento, si el banco cobra además Bs.5 por gastos bancarios, y el 2 por mil por concepto de impuestos de timbre sobre el pagaré. Tasa de descuento del 9%.
    b) Calcular la tasa de interés simple equivalente al descuento efectuado.
23. Una empresa debe a su banco los siguientes pagarés descontados, a una tasa del 9% de descuento y al 12% de interés en caso de mora:
    a) Bs. 20.000.- con vencimiento el 31 de agosto
    b) Bs. 60.000.- con vencimiento el 30 de septiembre
    c) Bs. 40.000.- con vencimiento el 31 de octubre

    El 10 de septiembre, en mora de pago para el primer pagaré, la empresa conviene con el banco sustituir los tres pagarés por uno solo, con vencimiento el 31 de diciembre del mismo año. Calcular el valor de éste nuevo documento.
24. Un banco descuenta un pagaré de Bs.100.000 a 18 meses de plazo con intereses del 12% anual, pagaderos por semestres anticipados. Hallar la tasa efectiva de descuento bancario cobrado por el banco.

Tema No 4

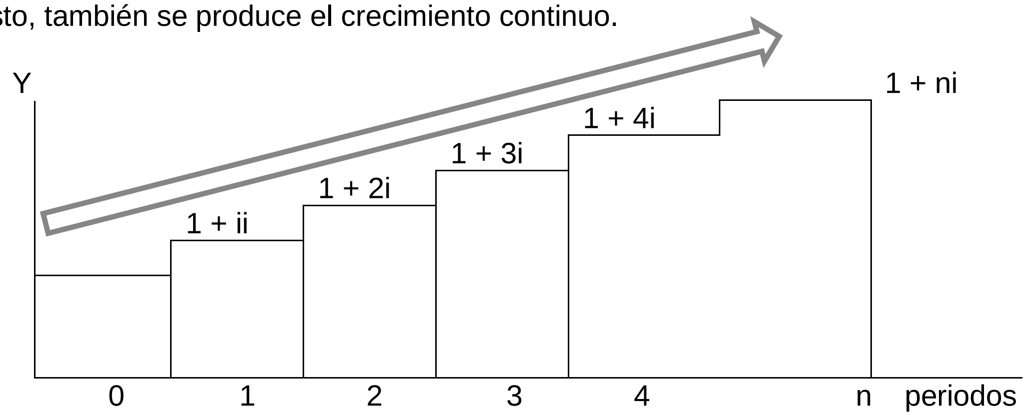
INTERES COMPUESTO

1. INTRODUCCIÓN

En los problemas de interés simple, el capital que genera los intereses permanece constante todo el tiempo de duración del préstamo. Si en cada intervalo de tiempo convenido en una obligación se agregan los intereses al capital, formando un monto sobre el cual se calcularán los intereses en el siguiente intervalo o periodo de tiempo, y así sucesivamente, se dice que los intereses se capitalizan y que la operación financiera es a interés compuesto.

En una operación financiera a interés compuesto, el capital aumenta en cada final de periodo, por adición a los intereses vencidos a la tasa convenida.

a) Función del tiempo.- El crecimiento natural es una variación proporcional a la cantidad presente en todo instante; tal es el caso del crecimiento de los vegetales, las colonias de bacterias, los grupos de animales, etc. Estos crecimientos son *funciones continuas* del tiempo. En la capitalización a interés compuesto, también se produce el crecimiento continuo.



En el crecimiento de un capital a interés compuesto, los intereses ganados se agregan al capital en intervalos de tiempo que se estipulan contractualmente; bajo estas condiciones, el monto es función discreta del tiempo.

b) Periodo de capitalización: Es el intervalo convenido en la obligación, para capitalizar los intereses = m

c) Tasa de interés compuesto: Es el interés fijado por periodo de capitalización = i

d) Valor futuro de un capital a interés compuesto o monto compuesto: Es el valor del capital final, o capital acumulado, después de sucesivas adiciones de los intereses. = Cn = S

e) Valor actual o presente = C = Co

2. CONCEPTO

Cuando los intereses se calculan a intervalos de tiempo (periodos), estos intereses se agregan al capital y este nuevo monto genera interés, entonces se dice que es interés compuesto.

3. PERIODO DE CAPITALIZACION

El interés puede ser convertido en capital en forma anual, semestral, trimestral, mensual, etc.
Dicho lapso de tiempo o periodo se denomina “periodo de capitalización”. Al número de veces que el interés se capitaliza durante un año se le denomina frecuencia de conversión.

Ej. 1 ¿Cuál es la frecuencia de conversión de un depósito bancario que se realiza al 6% de interés con capitalización trimestral?

Solución.

$$\frac{\text{Un año}}{\text{Un trimestre}} = \frac{\text{12 meses}}{\text{3 meses}} = 4$$

La frecuencia de conversión es igual a 4. El periodo de capitalización es trimestral.

4. TASA DE INTERÉS COMPUESTO

La tasa de interés se expresa generalmente en forma anual y si es menor se menciona su periodo de capitalización.

Ej. 2.

36% anual que se capitaliza mensualmente
24% anual que se capitaliza semestralmente
18% anual que se capitaliza trimestralmente

Si el interés se expresa sin mencionar su periodo de capitalización, se entiende que es anual.

Para resolver un problema de interés compuesto, cuando el periodo de capitalización es menor a un año; la tasa de interés anual debe convertirse a la tasa que corresponde al periodo de capitalización establecida. Es decir, si el interés se capitaliza semestralmente, la tasa de interés debe transformarse a interés semestral; si es mensual a interés mensual, etc.

Notación

S: Valor final o monto
C: Valor actual o presente
n: Numero de periodos (tiempo)
i: Tasa de interés

5. VALOR FINAL A INTERÉS COMPUESTO

Es el monto que se obtiene al incrementar al capital original, el interés compuesto en cada periodo de capitalización.

Partiendo de la formula de interés simple.

$$S= C\,(1+n.i)$$

Donde n = 1 (un periodo)
Al final del primer periodo $S=C\,(1+i)$

Para el segundo periodo $S= C\,(1+i)\,(1+i)= C\,(1+i)^2$

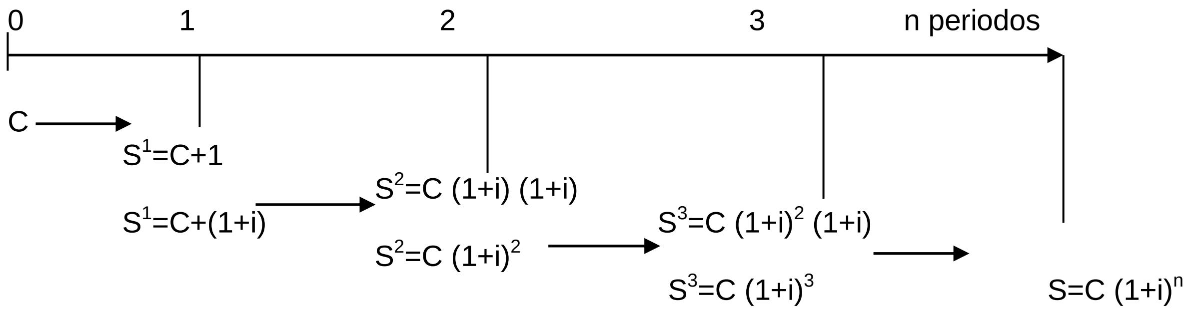
Para el tercer periodo $S= C\,(1+i)2(1+i)= C\,(1+i)^3$

Así sucesivamente

Para n–ésimo periodo $S=C\,(1+i)^n$

$$\boldsymbol{S = C\,(1+i)^{n}} \qquad (8)$$

Relación capital – tiempo (por periodo)



Ej. 3 Se deposita Bs. 6000 en un banco que reconoce una tasa de interés del 36% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál será el monto acumulado en tres años?

Solución.

C= 6000
n= 3 *años* => 3 * 12 meses = 36 *meses*
i= 0.36 *anual* => $\frac{0.36}{12}$ *mensual = 0,03 mensual*
S = ?

$S=C\,(1+i)^{n}$
$S= 6.000\,(1+0.03)^{36}$
S=6000 (2.988278)
S= 17.389,67 /

Ej. 4 Se deposita Bs. 30.000 en un banco durante dos años.

a) Hallar el valor final a la tasa de interés simple del 24% anual.
b) Hallar el valor final a la tasa de interés del 24% anual capitalizable mensualmente.
c) ¿Cuál es el mayor?

Solución

a)

C= 30.000	S=C (1+n.i)
n= 2 *años*	S=30.000[1+ (2) (0.24)]
i= 0.24 *anual*	S=30.000(1, 48)
S=?	**S= 44.400 /**

b)

C= 30.000	$S=C\,(1+i)^n$
n= 2 *años* => 2 * 12 => 24 *meses*	$S= 30.000(1 + 0,02)^{24}$
i= $\frac{0,24}{12}$ = 0.02 *mensual*	S= 30.000(1.608437)
S = ?	**S= 48.253,11 /**

c)El valor final obtenido a interés compuesto, es mayor que el obtenido a interés simple.

Ej. 5 Determine el monto final y el interés compuesto de un depósito de Bs. 12.000 durante dos años y seis meses, al interés del 8% capitalizable en forma trimestral.

Solución

$C = 12.000$

$n = 2$ años, 6 meses => $2 * 12\,m = 24m + 6m = \frac{30m}{3m} = 10$ trimestres

$i = \frac{0,08}{4} = 0,02$ *trimestral*

$S = ?$

$I = ?$

$S = C\,(1+i)^n$

$S = 12.000\,(1+0,02)^{10}$

$\underline{S = 14.627,93\ /}$ => Monto final

Interés compuesto = Monto final – Capital inicial

Interés compuesto = 14.627,93 – 12.000

$\underline{I = 2.627,93\ /}$ => *interés compuesto*

- **Monto con periodo fraccionario**

En el cálculo del monto a interés compuesto en general se consideran periodos enteros, sin embargo existen situaciones que requieren considerar periodos fraccionarios.

Cuando el periodo n es fraccionario, el problema puede resolverse de dos formas.

La **primera** reemplazando en la formula de interés compuesto el exponente n con el dato fraccionario o decimal.
La **segunda** forma calculando el valor final o monto, primero por el tiempo o periodo entero y finalmente calculando el valor final por la parte del tiempo o periodo fraccionario a interés simple.

Ej. 6 Calcular el valor final de un capital de Bs. 10.000 a interés compuesto durante 18 meses y 15 días a la tasa de interés del 18% capitalizable mensualmente.

Solución

Primera forma:

$C = 10.000$

$n = 18$ meses, 15 días => $15d \div 30d = 0,5$

$18 + 0,5 = 18,5$ meses

$i = 0,18$ anual $= \frac{0.18}{12m} = 0,015$ mensual

$S = ?$

$S = C\,(1+i)^n$

$S = 10.000\,(1+0,015)^{18,5}$

$S = 10.000(1,317109195)$

$\underline{S = 13.171,09\ /}$

Segunda forma:

a) Calcular el monto a interés compuesto por los 18 meses

$S = C\,(1+i)^n$

$S = 10.000(1+0,015)^{18}$

$S = 10.000(1,3073406)$

$\underline{S = 13.073,41\ /}$

b) Calcular el monto a interés simple por los 15 días

$C = 13.073,41$

$i = \frac{0,18}{360}$ *diario*

$S = C\,(1+n.I)$

$S = 13.073,41[1+(15)(\frac{0.18}{360})]$

$S = 13.073,41(1.0075)$

$\underline{S = 13.171,46\ /}$

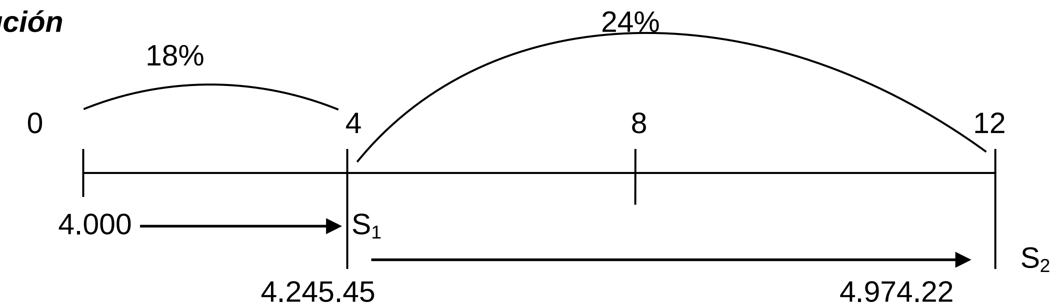
La segunda forma de cálculo se utiliza con más frecuencia en las operaciones financieras y actividades comerciales.

- **Monto cuando la tasa de interés cambia.**

En la mayoría de las operaciones financieras las tasas de interés son variables. Es decir, las tasas de interés aumentan o disminuyen según va transcurriendo el tiempo o periodo. En estos casos el problema se resuelve por partes, primero calculando a la tasa inicial y segundo por la nueva tasa de interés y así sucesivamente.

Ej. 7 Se invierte Bs. 4.000 por un año a la tasa del 18% capitalizable mensualmente. Determinar el monto al final del año, si transcurridos 4 meses la tasa se incremento al 24% capitalizable mensualmente.

Solución



C=4.000 — $S = C(1+i)^{n}$

n= 4 *meses* — $S_1 = 4.000\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{4}$

i=0.18 *mensual* — $S_1 = 4.000(1.061363)$

$S_1 = ?$ — $\underline{\underline{\mathbf{S_1 = 4.245.45\ /}}}$

C= 4.245,45 — $S = 4.245,45\,(1+0.02)^{8}$

n= 8 *meses* — $S = 4.245,45(1,171659)$

$i = \frac{0.24}{12} = 0.02$ *mensual* — $\underline{\underline{\mathbf{S = 4.974.22\ /}}}$

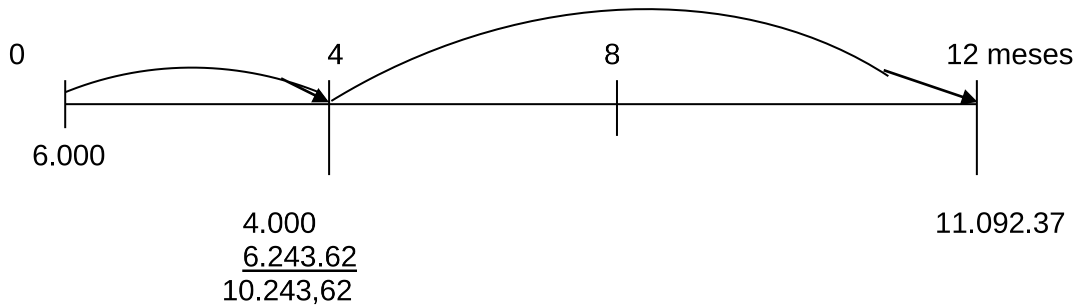
- **Deposito adicional o retiro realizado.**

Si en el transcurso del tiempo o periodo de duración de un depósito se efectúa un depósito adicional o se realiza u retiro parcial, el problema se divide en partes.

Cada vez que se realiza un deposito o retiro parcial, tiene que ser añadido o disminuido al importe compuesto en el momento en que se realiza dicha operación.

Ej. 8 En la fecha el Sr. Montenegro deposita Bs. 6.000 en un banco que paga el 12% de interés con capitalización mensual, transcurridos 4 meses se efectúa otro deposito de Bs. 4.000.
Hallar el importe que tendrá en el banco dentro de un año de haber realizado el primer depósito.

Solución



Primera parte

Se capitaliza por los 4 primeros meses

$$S = C\,(1+i)^n$$

C= 6.000

n= 4 meses

$$S = 6.000(1+0.01)^4$$

$i = \frac{0.12}{12} = 0.01$ *mensual*

$$\underline{\underline{\mathbf{S = 6.243{,}62\ /}}}$$

S=?

Al importe capitalizado de Bs. 6.243,62 se añade el depósito de Bs. 4.000. El nuevo importe obtenido se capitaliza por los siguientes ocho meses

Segunda parte

C= 10.243.62

n= 8 meses

$i = \frac{0.12}{12} = 0.01$ *mensual*

S=?

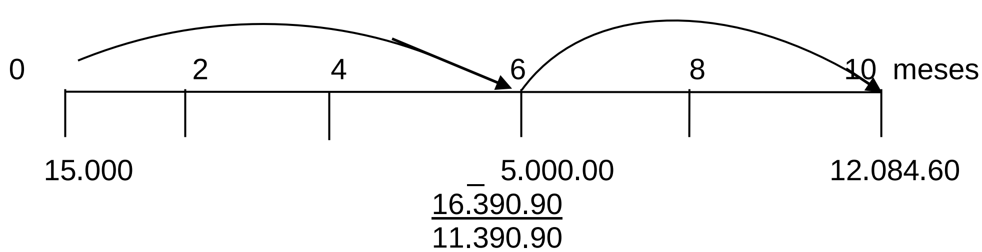
$$S = C\,(1+i)^n$$

$$S = 10.243.62\,(1+0.01)^8$$

$$\underline{\underline{\mathbf{S = 11.092.37\ /}}}$$

Ej. 9 Se deposita Bs. 15.000 en un banco que paga el 18% de interés con capitalización bimestral. Pasado 6 meses se retira Bs. 5.000. ¿Cuanto habrá en el banco al cabo del décimo mes?

Solución



Primero: Se determina el monto por 6 meses.

C= 15.000

n= 6 meses => 6 ÷ 2 = 3 bimestres

$i = \frac{0.18}{6\ \text{bimestres}} = 0.03$ bimestres

S=?

$$S = C\,(1+i)^n$$

$$S = 15.000\,(1+0.03)^3$$

$$\underline{\underline{\mathbf{S = 16.390{,}90\ /}}}$$

Segundo: Se disminuye el retiro de Bs. 5.000 y el saldo se capitaliza por 4 meses.

C= 11.390,90 $\qquad$ S= 11.390(1+0.03)^{2}

n= 4 meses => 4 ÷ 2 = 2 bimestres $\qquad$ S=11.390, 90(1+0,03) ^{2}

i= 0.03 bimestres $\qquad$ **S= 12.084,60 /**

S=?

Los problemas anteriores también pueden resolverse mediante otros métodos.

6. CALCULO DEL VALOR PRESENTE

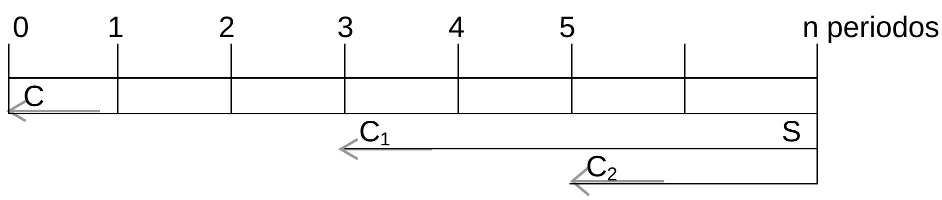
El valor actual o presente a interés compuesto de un determinado importe a fecha futura, es el valor que representa en el momento a una tasa establecida.

También podemos expresar que es el valor actual, que a una tasa determinada nos dará el valor final transcurrido el tiempo establecido.

En muchas operaciones comerciales, existe la necesidad de calcular el valor actual de ciertos capitales con vencimientos futuros. Sin embargo el valor final o monto se puede actualizar a distintas fechas anteriores a la fecha de vencimiento.

$$S = C\,(1+i)^{n}$$

$$\boxed{\mathbf{C = \frac{S}{(1+i)^{n}}}} \quad \textbf{ó} \quad \boxed{\mathbf{C = S(1+i)^{-n}}}$$



Ej. 10 ¿Cuánto se debe depositar en un banco si se desea obtener Bs. 11.406,09 dentro de dos años a una tasa de interés del 18% capitalizable bimestralmente?

Solución:

$$\mathbf{C = \frac{S}{(1+i)^{n}}}$$

S = 11.406,09

n= 2 años => 2*12m = $\frac{24m}{2m}$ = 12 bimes.

i= 18% => $\frac{0,18}{6 \text{ bimes.}}$ = 0,03 bimes.

$$C = \frac{11.406,09}{(1 + 0,03)^{12}}$$

$$C = \frac{11.406,09}{1,4257608}$$

C = 8.000.- /

Ej. 11 El Sr. Blanco desea hacer construir una vivienda que tiene un costo de Bs. 120.000.- con la condición de pagar el 50% al momento de suscribir el contrato de construcción y el saldo dentro de 18 meses a la conclusión y entrega de la vivienda. ¿Cuánto debe depositar en éste momento al banco para garantizar el pago, si la tasa de interés es del 24% capitalizable mensualmente?

Solución:

S= 60.000 $\qquad$ **C = S(1+i)$^{-n}$**

n= 18 meses $\qquad$ C = 60000(1+0,02)$^{-18}$

i= 0,24 anual => $\frac{0,24}{12\text{ m}}$ = 0,02 mensual $\qquad$ C = 60.000 (0,7001594)

C = 42.009,56 /

C=? $\qquad$ Importe que debe depositar al banco.

Ej. 12 Una empresa financiera desea realizar una inversión de Bs. 25.000.- para obtener dentro de tres años un ingreso de Bs. 60.000.- Si se considera una inflación promedio del 30% anual. ¿Conviene realizar la inversión?

Solución:
Se comparan los Bs. 25.000.- que debe invertir en éste momento con los Bs. 60.000.- que se espera recibir dentro de tres años.

Para comparar es necesario que ambas cantidades sean equivalentes. Los Bs. 60.000.- debemos actualizar al momento presente para tener la misma base o fecha de comparación para luego dar una respuesta.

S = 60.000
n= 3 años
inflación = 30% a
C =?

$C = S(1+i)^{-n}$
$C = 60.000\ (1 + 0{,}30)^{-3}$
$C = 60.000\ (0{,}455166135)$
<u>C = 27.309,97 /</u>

Los Bs. 60.000.- que la empresa recibirá dentro de 3 años equivale a Bs 27.309,97, descontados la inflación. Este valor presente de los ingresos se compara con el valor presente de la inversión que es de Bs. 25.000.- y se constata que efectivamente se tiene una utilidad de Bs. 2.309,97, por lo tanto conviene invertir.

7. CÁLCULO DEL TIEMPO

Uno de los factores que interviene en créditos, ventas o compras a plazos, pagares, etc. Es el tiempo, en el cálculo de interés compuesto el tiempo se convierte a periodos de capitalización que pueden ser anual, semestral, trimestral, bimestral, mensual, etc.

Para calcular n es necesario despejar de la formula principal (8) aplicando propiedades de logaritmos.

$$S = C\ (1+i)^n$$

$$\log S = \log C + n \cdot \log (1+i)$$

$$n \cdot \log(1+i) = \log S - \log C$$

$$\boxed{n = \frac{\log S - \log C}{\log(1+i)}}$$

Ej. 13 ¿En cuanto tiempo un depósito de Bs. 10.000 se convertirá en Bs. 14.509,46 a la tasa del 18% capitalizable mensualmente?

Solución

C= 10.000

S= 14.509,46

$i = 0.18$ *anual* $= \frac{0.18}{12} = 0.015$ *mensual*

$$n = \frac{\log S - \log C}{\log (1+i)}$$

$$n = \frac{\log 14.509.46 - \log 10.000}{\log (1+0.015)}$$

$$n = \frac{4{,}16165125 - 4}{0.006466042}$$

$$n = \frac{0.16165125}{0.006466042}$$

<u>n = 25 meses /</u>

Ej. 14 ¿En cuanto tiempo se convertirá Bs. 6.200 en Bs. 7.253,13 a una tasa del 24% capitalizable bimestralmente?

Solución

C= 6.200

S= 7.253,13

$i = \frac{0.24}{6} = 0{,}04$ *bimestral*

n=?

$n = \frac{\log S - \log C}{\log(1+i)}$

$n = \frac{\log 7.253{,}13 - \log 6.200}{\log(1+0.04)}$

$n = \frac{3.860525462 - 3.792391589}{0.017033339}$

$n = \frac{0.068133873}{0.017033339}$

n= 3,93 => 4 bimestres

n= 4 (2 m)

n= 8 meses /

8. CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS

Las condiciones contractuales de una operación financiera o transacción en el interés compuesto es la tasa nominal con periodo de capitalización de la tasa de interés debe coincidir con el tiempo expresado en numero de periodos.

Para calcular la tasa de interés i, es necesario despejar de la formula principal (8) aplicando propiedades de logaritmo.

$$S = C(1+i)^n$$

Aplicando logaritmo $\log S = \log C + n \log(1+i)$

$$\boxed{\log(1+i) = \frac{\log S - \log C}{n}}$$

Otra forma:

$$S = C(1+i)^n$$

$$\frac{S}{C} = (1+i)^n \quad \text{Aplicando la raíz n-ésima}$$

$$\sqrt[n]{S/C} = 1 + i$$

$$\boxed{i = \sqrt[n]{S/C} - 1}$$

Ej. 15 ¿A que tasa de interés capitalizable mensualmente un capital de Bs.15.000 se convertirá en Bs. 23.294.89 en un año y medio

Solución

$$\log(1+i) = \frac{\log S - \log C}{n}$$

i =?

C = 15.000.-

S = 23.294,89

n= 1,5 años * 12m = 18 m

$\log(1+i) = \frac{\log 23.394{,}89 - \log 15.000}{18}$

$\log(1+i) = \frac{4.369121 - 4.176091}{18}$

$\log(1+i) = \frac{0.19303}{18}$

log(1+i) = 0.010723874 aplicamos antilogaritmo

1+i = antilog 0.010723874 (calculadora tecla *10^x*)

1+i = 1,025

I = 1.025 – 1

i = 0.025 mensual / ó i = 2.5% mensual /

i = (2.5)(12m) => **i = 30% anual capitalizable mensualmente /**

Utilizando la otra formula:

$i = \sqrt[n]{S / C} - 1$

$i = \sqrt[18]{23.294,89 / 15.000} - 1$
i = 1.024756 – 1
i = 0.024756 mes *12 i = 0.2971 * 100 **i = 29.71% anual /**

9. RELACION ENTRE INTERÉS SIMPLE E INTERÉS COMPUESTO

El interés compuesto crece más rápidamente que el interés simple y existe una relación entre el interés simple e interés compuesto.

Interés simple *Interés compuesto*

$S = C(1+n.i_s)$ $S = C(1+i_c)^n$

Igualando los segundos miembros

$C(1+n.i_s) = C(1+i_c)^n$

Despejando la tasa de interés simple i_s

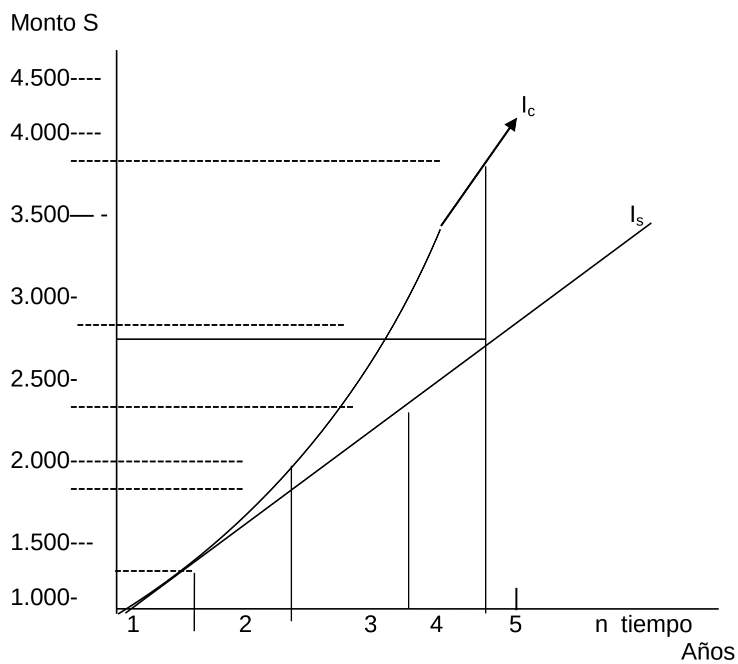
$$i_s = \frac{(1+i_c)^n - 1}{n} \quad (9)$$

✓ **Grafica de interés simple e interés compuesto**

Para representar la grafica del interés simple e interés compuesto se considera un capital de Bs. 1.000 y una tasa de interés de 40%

C = 1.000 i = 0.40

Tiempo (Periodo)	Interés Simple	Interés Compuesto
N	S=C(1+n.i)	$S`=C(1+i)^n$
n=1	S=1.400	S`=1.400
n=2	S=1.800	S`=1.960
n=3	S=2.200	S`=2.744
n=4	S=2.600	S`=3.841,60
n=5	S=3.000	S`=5.378,24



Grafica interés simple – interés compuesto

10. TASA NOMINAL Y TASA EFECTIVA

La tasa establecida para una operación financiera se conoce como tasa nominal. Si la tasa de interés se capitaliza en forma semestral, trimestral o mensual, la cantidad efectivamente pagada o ganada es mayor que si se determina en forma anual. En estos casos se puede determinar una tasa efectiva anual

Ej 16

Si se presta un capital al 12% capitalizable trimestralmente, el 12% representa la tasa nominal anual, la tasa efectiva queda expresada por los intereses que genera los Bs. 100 en un año, bajo las condiciones establecidas en el préstamo.

Solución

C= 100	$S= C\,(1+i)^n$
n= 1 año = 4 trimestres	$S=100(1+0.03)^4$
$i = \frac{0.12}{4} = 0.03$ bimestres	$S= 100(1.25508)$
=?	S=112.55

En un año Bs. 100 generan un interés de Bs. 12.55
Es decir, la tasa efectiva es 12.55%

11. TASAS EQUIVALENTES

Dos tasas son equivalentes cuando en condiciones diferentes producen la misma tasa efectiva anual.
Para poder comprender mejor utilizaremos la siguiente simbología:

i= Tasa efectiva anual.

j= Tasa nominal anual

m= Numero de capitalizaciones al año

- ✓ **Relación entre la tasa nominal y efectiva**

Se ha establecido que ambas tasas son equivalentes si producen el mismo interés en un año.

El monto de interés efectivo anual es:

$$S= 1+ i$$

El monto de j con m capitalizaciones al año es:

$$S= \left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

Como estos montos son iguales, entonces podemos igualar los segundos miembros.

$$1+ i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

$$\boxed{i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1} \quad \textbf{(10)}$$

Formula que permite calcular la tasa anual i, equivalente a una tasa nominal j con m capitalizaciones al año.
Despejando j tendremos:

$$1+i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

$$(1+i)^{1/m} = 1+\frac{j}{m}$$

$$\frac{j}{m} = (1+i)^{1/m} - 1$$

$$\boxed{j = m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right]} \qquad (11)$$

La formula general de interés compuesto podemos expresar en la forma siguiente:

$$\boxed{S = C\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m.\,n}}$$

Ej. 17 Calcular el valor final de un capital invertido de Bs. 20.000 al interés compuesto del 18% capitalizable semestralmente durante 6 años.

Solución

C= 20.000

n= 6 años

i= 0.18 anual

m =2 semestres

$$S = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m.n}$$

$$S = 20.000\left(1+\frac{0.18}{2}\right)^{2.6}$$

$$S = 20.000\,(1+0.09)^{12}$$

$$S = 20.000\,(2,812665)$$

S = 56.253,30 /

Ej. 18 Hallar la tasa efectiva i equivalente a una tasa nominal de 8% convertible mensualmente.

Solución

j= 0.08

m= 12

i =?

$$i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1$$

$$i = \left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12} - 1$$

$$i = 1,082999 - 1$$

$$i = 0,082999 * 100$$

i = 8,30 % /

Ej. 19 ¿Qué tasa capitalizable semestralmente es equivalente al 10% capitalizable trimestralmente?

Solución

j =?

m=2

j_1 = 0.10

m_1 = 4

$$\boldsymbol{i} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1$$

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1 = \left(1+\frac{j}{m_1}\right)^{m_1} - 1$$

$$\left(1+\frac{j}{2}\right)^2 = \left(1+\frac{0,10}{4}\right)^4 - 1 + 1$$

Elevando ambos miembros a la potencia ½

$$1+\frac{j}{2} = \left(1+\frac{0.10}{4}\right)^2$$

$$1+\frac{j}{2} = 1{,}050625$$

$$j = 2\,(1.050625 - 1)$$

$$j = 2(0.050625)$$

$$j = 0.10125$$

j =10.125% /

Problemas Resueltos

1) ¿Cuánto deberá depositar hoy un padre de familia cuyo hijo cumple 10 años para que al cumplir 20 años su hijo pueda cobrar un capital de $ 20.000 para costear sus estudios universitarios si la tasa i del dinero es del 9% anual con capitalización mensual?
b) a manera de prueba hallar el número de periodos de capitalización o tiempo de la operación
c) hallar la tasa de interés

a) S = 20.000
C =?
n= 10 años * 12 = 120 meses
$i = \frac{0.09}{12}$ anual = 0.0075
m = Capitalización mensual

$$C = \frac{S}{(1+i)^n}$$

$$C = \frac{20.000}{(1.0075)^{120}}$$

C = 8.158,75 /

$$b)\ n = \frac{\log 20000 - \log 8158.75}{\log 1.0075}$$

$$n = \frac{4.301029996 - 3.911623626}{0.003245054}$$

n= 120 meses /

$$c)\ \log(1+i) = \frac{\log S - \log C}{n}$$

$$\log(1+i) = \frac{4.301029996 - 3.911623626}{120}$$

Log (1+i) = 0.003245052
1 + i = Antilog 0.003245052
i = 1.007499993 – 1
i = 0.007499 mes * 12 i = 0.08999 * 100 **i = 9 % anual /**

2) Un inversionista deposita $ 50.000 con la promesa de recibir un capital de $ 200.000 dentro de 10 años si le proponen una capitalización de los créditos en forma trimestral.
a) hallar la tasa de rendimiento de la inversión
b) hallar la tasa de rendimiento si la capitalización es cuatrimestral
c) hallar la tasa de rendimiento si la capitalización es semestral

Datos
C = 50.000
S = 200.000
n= 10 años * 4 trim. = 40 trim

Capitalización trimestral

a) $i = \sqrt[n]{\frac{200000}{50000}} - 1$

$i = \sqrt[40]{\frac{200000}{50000}} - 1$

i = 0.035264923 = 3.53 % trimestral

b) $i = \sqrt[30]{\frac{200000}{50000}} - 1$

i= 0.047294122 = 4.73%

c) $i = \sqrt[20]{\frac{200000}{50000}} - 1$

i= 0.071773462 = 7.18% semestral

3) Cual es la tasa de interés de un documento con valor nominal de $ 85000 si el valor actual es $ 20000 y el tiempo es de 4 años con capitalización cuatrimestral

Datos
S = 85.000
C = 20.000
n= 4 años * 3 cuatrim. = 12 cuatrimestral
Capitalización cuatrimestral
i=?

$i = \sqrt[12]{\frac{85000}{20000}} - 1$

i = 0.128147133 = 12.81 %

4) Al cabo de cuanto tiempo se triplicara un capital cualquiera si se lo presta al 15% anual con capitalización mensual

Datos
C = 30.000
S = 3 * 30000 = 90.000
i= 0.15 anual = 0.15 / 12 = 0.0125
Capitalización mensual
n=?

$n = \frac{\log Cn - \log Co}{\log (1+i)}$

$n = \frac{\log 90.000 - \log 30.000}{\log (1.0125)}$

$n = \frac{4.954242509 - 4.477121255}{0.005395031}$

n= 88.44 meses /

Tema No 5

NUDA PROPIEDAD
VALUACIÓN DE BOSQUES

NUDA PROPIEDAD.- Es aquel derecho de una persona sobre una cosa en la que su relación con ella es de ser sola y únicamente propietario. Como propietario, tiene el dominio sobre la cosa, pero no ostenta la posesión por haber sido cedida ésta a través de un derecho real denominado usufructo.

La nuda propiedad son el conjunto de prerrogativas que conserva el propietario de una cosa, cuando esa cosa es objeto de un derecho de propiedad (usufructo, o habitación por ejemplo) por parte de un tercero.

El derecho de propiedad es el derecho que tiene una persona de utilizar (*usus*), sacar beneficios de una cosa (*fructus*) y disponer de ella, o sea venderla, hipotecarla e inclusive destruirla (*abusus*).

Ejemplo: Supongamos que usted es el propietario de una propiedad. Automáticamente usted alquila esa propiedad, usted se convierte el nudo propietario de la misma. Usted conserva el derecho de disponer de la cosa (*abusus*: venderla, etc.) sin embargo el derecho de usufructo esta en manos de la persona que le paga a usted el alquiler. El inquilino tiene los derechos de uso y fructo, pero no puede vender la propiedad ni hipotecarla, ni destruirla, porque ese es el derecho (*abusus*) que usted como nudo propietario conserva.

Es el valor actual del único flujo neto que puede producir una inversión después de transcurrido cierto número de periodos de tiempo.

$$\boxed{NP = \frac{FNh}{(1 + i)^n}}$$

VALOR ACTUAL NETO.- Es el valor actual de los flujos netos que puede producir una inversión año tras año, desde el año 0 hasta el n después de proporcionar el costo de oportunidad de dinero.

El **Valor actual neto** también conocido como valor actualizado neto (en inglés *Net present value*), cuyo acrónimo es VAN (en inglés NPV), es un procedimiento que permite calcular el valor presente de un determinado número de flujos de caja futuros, originados por una inversión. La metodología consiste en descontar al momento actual (es decir, actualizar mediante una tasa) todos los *flujos de caja* futuros del proyecto. A este valor se le resta la inversión inicial, de tal modo que el valor obtenido es el valor actual neto del proyecto.

El método de valor presente es uno de los criterios económicos más ampliamente utilizados en la evaluación de proyectos de inversión. Consiste en determinar la equivalencia en el tiempo 0 de los flujos de efectivo futuros que genera un proyecto y comparar esta equivalencia con el desembolso inicial. Cuando dicha equivalencia es mayor que el desembolso inicial, entonces, es recomendable que el proyecto sea aceptado.

La fórmula que nos permite calcular el Valor Actual Neto es:

$$\boxed{\mathrm{VAN} = \sum_{t=1}^{n} \frac{V_t}{(1+k)^t} - I_0}$$

V_t = representa los flujos de caja en cada periodo t.

I_0 = es el valor del desembolso inicial de la inversión.
n = es el número de períodos considerado.
El tipo de interés es *k*. Si el proyecto no tiene riesgo, se tomará como referencia el tipo de la renta fija, de tal manera que con el VAN se estimará si la inversión es mejor que invertir en algo seguro, sin riesgo específico. En otros casos, se utilizará el coste de oportunidad.

Cuando el VAN toma un valor igual a 0, *k* pasa a llamarse TIR (tasa interna de retorno). La TIR es la rentabilidad que nos está proporcionando el proyecto.

$$\boxed{\text{VAN} = \text{NP} - \text{IO}}$$

TASA INTERNA DE RETORNO.- La **tasa interna de retorno** o **tasa interna de rentabilidad** (TIR) de una inversión, está definida como el promedio geométrico de los rendimientos futuros esperados de dicha inversión, y que implica por cierto el supuesto de una oportunidad para "reinvertir". En términos simples en tanto, diversos autores la conceptualizan como la tasa de interés (o la tasa de descuento) con la cual el valor actual neto o valor presente neto (VAN o VPN) es igual a cero. El VAN o VPN es calculado a partir del flujo de caja anual, trasladando todas las cantidades futuras al presente. Es un indicador de la rentabilidad de un proyecto: a mayor TIR, mayor rentabilidad.

Se utiliza para decidir sobre la aceptación o rechazo de un proyecto de inversión. Para ello, la TIR se compara con una tasa mínima o tasa de corte, el coste de oportunidad de la inversión (si la inversión no tiene riesgo, el coste de oportunidad utilizado para comparar la TIR será la tasa de rentabilidad libre de riesgo). Si la tasa de rendimiento del proyecto - expresada por la TIR- supera la tasa de corte, se acepta la inversión; en caso contrario, se rechaza.

EJEMPLO 1.- Quieren vendernos un bosque en el municipios de Ixiamas provincia Iturralde del Departamento de La Paz en $us 3’000.000 bajo el argumento que dicho bosque nos podrá reportar un flujo neto de $ 10’000.000 dentro de 15 años si la tasa de interés es del 9% anual con capitalización trimestral
a) Hallar la tasa efectiva anual del dinero
b) Hallar la nuda propiedad
c) Hallar el valor actual neto
d) Hallar la tasa interna de retorno

Datos
n = 15 años
FN15 =10’000.000
Io = 3'000.000
i = 0.09 anual
m = 4 trimestral

a) $$\mathbf{ie = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1}$$

$$ie = \left(1 + \frac{0.09}{4}\right)^4 - 1$$

$$\underline{\mathbf{ie = 0.093/}}$$

b) $$\mathbf{NP = \frac{FNh}{(1+i)^n}}$$

$$NP = \frac{10'000.000}{(1+0.093)^{15}} \qquad \frac{10'000.000}{3,795792}$$

$$\mathbf{NP = 2'634.496,31 < 3'000.000}$$

No conviene

c)**VAN = NP – Io**

VAN = 2'634.496.31 – 3'000.000

VAN= - 365.503,69/

No cubre

d) TIR = VAN = 0

TIR = Io = NP

$$\boxed{Io = \frac{FNn}{(1+i)^{n}}}$$

Despejando i:

$$TIR = \sqrt[n]{\frac{FNn}{Io}} - 1$$

$$TIR = \sqrt[15]{\frac{10'000.000}{3'000.000}} - 1$$

TIR = 0,08357/

TIR **=** 0.08357 8.35 < 9.3 No Conviene

Si hallamos la tasa de Interés nominal

$$\mathbf{ie = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m} - 1}$$

$$1 + ie = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m} \quad =>$$

$$\mathbf{in = \left[\sqrt[m]{ie + 1} - 1\right] m}$$

$$In = \left[\sqrt[4]{0,093 + 1} - 1\right] 4$$

In = 0.0899 => 9%

EJEMPLO 2.- Quieren vendernos un terreno en la localidad de Chuma en $ 35.000 bajo el argumento de que dicho terreno podremos venderlo dentro de 10 años en 120.000 si la tasa de interés del dinero es del 11% anual con capitalización mensual

a) hallar la tasa efectiva anual del interés
b) halla la nuda propiedad
c) hallar el valor actual neto
d) hallar la tasa interna de retorno

DATOS

FN10=120000
Co = 35000
i = 0.11
m = 12 mensual
n = 10 años

a) $\mathbf{ie = \left(1 + \frac{i}{\ }\right)^{m} - 1}$

$$ie = \left(1 + \frac{0.11}{12}\right)^{12} - 1$$

ie= 0.1157/

b) $NP = \dfrac{FNh}{(1+i)^n}$

$$NP = \frac{120.000}{(1+0.1157)^{10}} = \frac{120.000}{2.98864}$$

NP = 40.151.98 > 35.000 Si conviene

c) **VAN = NP – Io**

VAN = 40.151,98 – 35.000

VAN= 5.151,98/

d) TIR = VAN = 0

TIR = Io = NP

$$\boxed{Io = \frac{FNn}{(1+i)^n}}$$

Despejando i:

$$TIR = \sqrt[n]{\frac{FNn}{Io}} - 1$$

$$TIR = \sqrt[10]{\frac{120.000}{35.000}} - 1$$

TIR = 0,1311/

13.11% > 11% SI CONVIENE

EJEMPLO 3.- Nos ofrecen depositar un ahorro de 20000 por un bono convertible dentro de 8 años a 75000 si la tasa de interés es del 13% anual con capitalización mensual

a) hallar la tasa efectiva anual
b) hallar la nuda propiedad
c) hallar el valor actual neto
d) hallar la tasa interna de retorno

Datos
FN8 = 75.000
Co= 20.000
i=0.13 anual
m= 12 mensual

a) $ie = \left(1 + \dfrac{i}{m}\right)^m - 1$

$$ie = \left(1 + \frac{0.13}{12}\right)^{12} - 1$$

ie= 0.1380/

b) $NP = \dfrac{FNh}{(1+i)^n}$

$$NP = \frac{75.000}{(1+0.1380)^{8}} \qquad \frac{75.000}{2.81343}$$

NP = 26.657,78 > 20.000 Si conviene

c)**VAN = NP – Io**

VAN = 26.657.78 – 20.000

VAN= 6.657.78/

d) TIR = VAN = 0

TIR = Io = NP

$$\boxed{Io = \frac{FNn}{(1+i)^{n}}}$$

Despejando i:

$$TIR = \sqrt[n]{\frac{FNn}{Io}} - 1$$

$$TIR = \sqrt[8]{\frac{75.000}{20.000}} - 1$$

TIR = 0,1797/

17.97% > 13% SI CONVIENE

Tema No. 6

ANUALIDADES

1. **CONCEPTO Y GENERALIDADES.-** Anualidad es todo pago periódico, también se llaman rentas ejemplo: Alquileres de habitación, teléfono, luz agua, pensiones a la ex mujer o ex marido.

Se llaman anualidades porque en principios se referían a pagos anuales sin embargo, con el transcurso del tiempo anualidad es todo pago periódico que puede ser anual, semestral, cuatrimestral, trimestral, mensual, semanal o diario.

2. **CLASIFICACION DE LA ANUALIDAD**

2.1 SEGÚN EL TRATAMIENTO MATEMATICO.- Las anualidades pueden ser:

a) ANUALIDADES CIERTAS.- Cuando se conocen la fecha inicial y final. Estas anualidades son tratadas por la matemática financiera.
b) ANUALIDADES INCIERTAS.- O contingentes son aquellas que no se saben cuando comienzan y cuando terminan. Ejemplo Rentas vitalicias, seguros de vida y otros seguros contingentes; Estas anualidades son tratas por las matemáticas actuariales.

2.2 SEGÚN SU FINALIDAD

a) ANUALIDAD DE IMPOSICION.- Aquellas que tratan de formar un capital
b) ANUALIDAD DE AMORTIZACION.- Aquellas que tratan de extinguir una deuda.

2.3 SEGÚN EL PAGO

a) ANUALIDAD VENCIDA.- Cuando los pagos se efectúan al final del periodo
b) ANUALIDAD ANTICIPADA.- Cuando los pagos se efectúan al principio del periodo
c) ANUALIDAD DIFERIDA.- Cuando los pagos se efectúan transcurrido un determinado tiempo

SEGÚN SU ANUALIDAD.-

- *Constantes*
  - *Inmediatas*
    - *Vencidas*
      - *Creciente*
        - *En razón geométrica*
        - *En razón aritmética*
      - *Decreciente*
        - *En razón geométrica*
        - *En razón aritmética*
    - *Adelantadas*
      - *Creciente*
        - *En razón geométrica*
        - *En razón aritmética*
      - *Decreciente*
        - *En razón geométrica*
        - *En razón aritmética*
  - *Diferidas*
    - *Vencidas*
      - *Creciente*
        - *En razón geométrica*
        - *En razón aritmética*
      - *Decreciente*
        - *En razón geométrica*
        - *En razón aritmética*
    - *Adelantadas*
      - *Creciente*
        - *En razón geométrica*
        - *En razón aritmética*
      - *Decreciente*
        - *En razón geométrica*
        - *En razón aritmética*

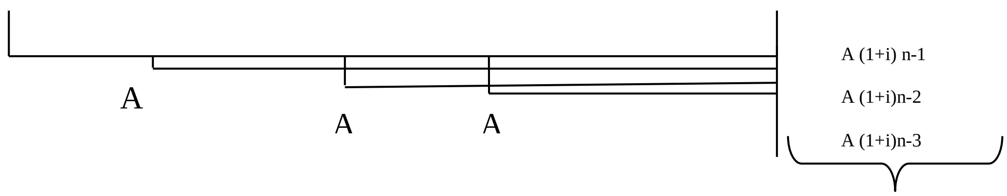
1. ANUALIDADES DE IMPOSICION CONSTANTES E INMEDIATAS

Las vencidas son anualidades que se depositan al final de cada periodo.
Son inmediatas por que comienzan a depositarse inmediatamente después de haber asumido el compromiso de formar el capital

SIMBOLOS

Cn.- Capital formado
n.- Números de anualidades y tiempo de operación
.i.- la tasa de interés
a.- Anualidades vencidas
1+ i.- factor de capitalización
$\frac{1}{1+i}$ Factor de actualización

DEDUCCION DE LAS FORMULAS.-



$E = Cn$

$Cn = Co\,(1+i)^n$

ECUACION FUNDAMENTAL

$Cn = a\,(1+i)\,n-1 + a\,(1+i)n-2$

$$\boxed{S = a\,\frac{1 - q\ n}{1 - q}}$$

FORMULA DE SUMA DE UNA SERIE GEOMETRICA

La razón de una serie geométrica se halla dividiendo cualquier término de la serie anterior

SUMA DE LAS IMPOSICONES CONSTANTES INMEDIATAS Y VENCIDAS

PROBLEMA

1. Un comerciante desea formar un capital de $us 60000 mediante ciertos depósitos trimestrales vencidos durante 3 años. Si la tasa de interés que pago el Banco es del 9% anual:

a) hallar la anualidad de imposición
b) construir el cuadro de movimientos de fondos
c) a manera de prueba hallar el número de anualidades
d) a manera de prueba calcular la tasa de interés

Datos
Cn = 60000 $us

*n = 3 años *4 trim = 12 trimestres*
i = 0,09 anual => 0.09/4 = 0.0225 trimestral
Depósitos trimestrales vencidos
a = ?
b = cuadro
c= n = ?
d = i = ?

a) $$R = \frac{Cn * i}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow \frac{60.000 * 0,0225}{(1+0.0225)^{12} - 1} = \frac{1.350}{0,30605}$$

R = 4.411,04/

b) CUADRO DE MOVIMIENTO DE FONDOS i = 0.0225

Trimestre	*Anualidad de imposición*	*Servicio de intereses*	*Capital parcial*	*Formado total*
0	-	-	-	-
1	*4.411.04*	-	*4.411.04*	*4.411.04*
2	*4.411.04*	*99.25*	*4.510.29*	*8.921.33*
3	*4.411.04*	*200.73*	*4.611.77*	*13.533.10*
4	*4.411.04*	*304.49*	*4.715.53*	*18.248.63*
5	*4.411.04*	*410.59*	*4.821.63*	*23.070.26*
6	*4.411.04*	*519.08*	*4.930.12*	*28.000.38*
7	*4.411.04*	*630.01*	*5.041.05*	*33.041.43*
8	*4.411.04*	*743.43*	*5.154.47*	*38.195.90*
9	*4.411.04*	*859.41*	*5.270.45*	*43.466.35*
10	*4.411.04*	*977.99*	*5.389.03*	*48.855.38*
11	*4.411.04*	*1.099.25*	*5.510.29*	*54.365.67*
12	*4.411.10*	*1.223.23*	*5.634.33*	*60.000.00*

c) $$R = \frac{Cn * i}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow (1+i)^n - 1 = \frac{Cn * i}{R} \Rightarrow (1+i)^n = \frac{Cn * i}{R} + 1 \quad // \log$$

$$n * \log(1+i) = \log\left[\frac{Cn*i}{R} + 1\right]$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{Cn*i}{R} + 1\right)}{\log(1+i)} \qquad n = \frac{\log\left(\frac{60.000*0.0225}{4.411.04} + 1\right)}{\log(1+0.0225)} \qquad n = \frac{\log 1.306050}{\log 1.0225}$$

$$n = \frac{0.11596}{0.009663}$$ ***n = 12 trimestres/***

d) $$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{Cn}{R} \Rightarrow \frac{(1+i)^{12} - 1}{i} = \frac{60.000}{4.411.04} \Rightarrow \frac{(1+i)^{12} - 1}{i} = 13.602234$$

buscamos en las tablas financieras n=12 como no existe un valor que satisfaga este resultado, tomamos los valores aproximados para luego realizar la interpolación:

0.5 { x { 2 % => 13.41208973 } 0.19014466 }
i => 13.60223439 } (13.602 – 13.412) } (13.795 – 13.412)
2.5% => 13.79555297 } 0.38346324

FORMULA EMPIRICA PARA CALCULAR LA TASA

I= 0.011+ (0.030 – 0.011) 13.6027 - 1265.33
14.1920 – 126533

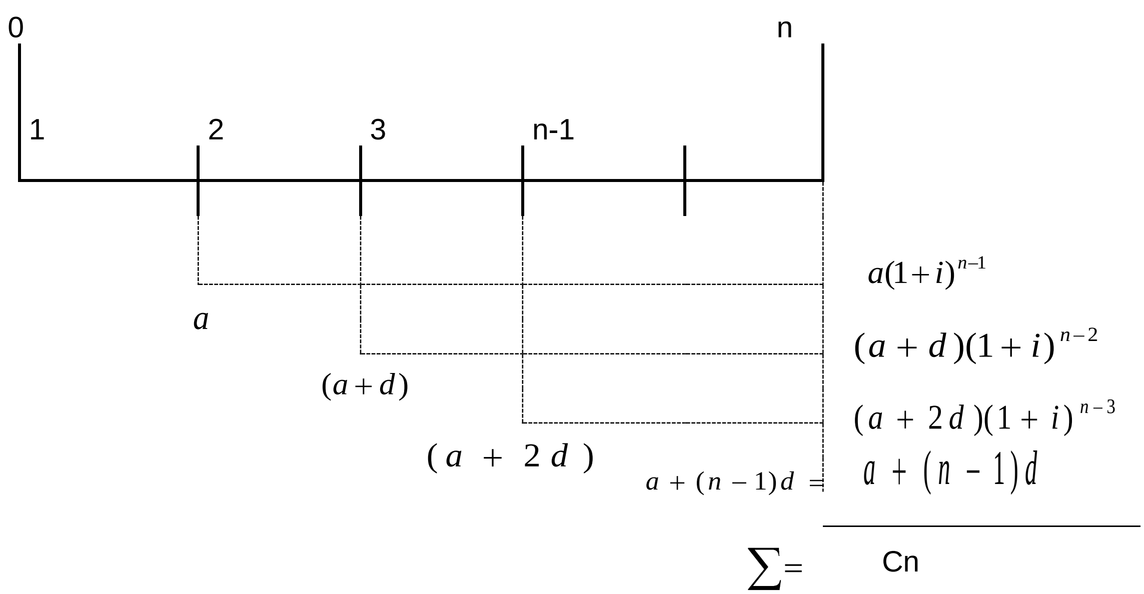
I= 0.02271

2. ANUALIDADES DE IMPOSICIÓN VARIABLES EN RAZÓN ARITMÉTICA

SIMBOLIGÍA

$^{/}C^{a}$ = Suma de las Imposiciones o capital formado.
n = Número de imposiciones.
i = Tasa o tipo de interés.
d = Razón aritmética
d > 0 Creciente
d < 0 Decrecientes
a = Primera anualidad de imposición vencida.
a = Primera anualidad de imposición adelantada.
$S_{n}i$ = Suma de las anualidades de imposición contantes para la unidad de capital.

1. DEDUCCIÓN DE LAS FORMULAS.



$$Cn = a(1+i)^{n-1} + (a+d)(1+i)^{n-2} + (a+2d)(1+i)^{n-1} + ... + a + (n-1)d \quad (\alpha)$$

Multiplicar (α) **por** $(1+i)$

$$Cn(1+i) = a(1+i)^{n} + (a+d)(1+i)^{n-1} + (a+2d)(1+i)^{n-2} + ... + \text{[redacted]} + (n-1)\text{[redacted]}(1+i) \quad (\beta)$$

(β) **-** (α)

$$Cn(1+i) = a(1+i)^{n} + \text{[redacted]}(1+i)^{n-1} + d(1+1)^{n-2} + d(1+i)^{n-3} + ... + d(1+i) - a - nd + d$$

$$Cn_i = a(1+i)^n + d\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] - a - nd$$

$$Cn_i = a(1+i)^n - a + d\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] - nd$$

$$Cn \ = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} + \frac{d}{i}\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nd}{i}$$

$$Cn \ = aS_n i + \frac{d}{i} + S_n i - \frac{nd}{i}$$

$$Cn = S_n i\left(a + \frac{d}{i}\right) - \frac{nd}{i} \qquad\qquad S_n i = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$a = \frac{Cn - S_n i + \frac{nd}{i}}{S_n i}$$

$$a = CnS^{-1}{}_n i - \frac{d}{i} + \frac{nd}{i} S^{-1}{}_n i$$ **Primera anualidad vencida**

$$\mathrm{a} = S^{-1}{}_n i\left(\frac{Cn}{(1+i)} + \frac{nd}{i} - \frac{d}{i}\right)$$ **Primera anualidad adelantada**

2. CUADRO DE MOVIMIENTO DE FONDOS.

Ejercicio 1: Un estudiante de contaduría publica desea formar un capital dólares 5000 para poder casarse para salir de la universidad al cabo de 3 años si el banco paga 12% anual y los depósitos se realizan cada fin de semestre:

a) hallar la anualidad de imposición
b) construir el cuadro de movimiento de fondos

<u>Datos</u>

$^{/}C_n{}^{g} = 5000$
n= 3 años
i= 0.12 anual
d=100
Depósitos semestrales vencidas crecientes

a) $\mathrm{S}\ {}_6/{}_{0.06} = \frac{0.06}{1.06^6 - 1}$

$\mathrm{S}\ {}_6/{}_{0.06} = 0.14336$

a= $S_{n/i}^{-1}\left({}^{/}C_n^{\ g} + \frac{n*d}{i}\right) - \frac{d}{i}$

a= 5000 $\left(5000 + \frac{6*100}{0.06^6}\right) - \frac{100}{0.06}$

a= 0.14336 *15000+1666.67

a= 483.73

b)

Cuadro de Movimiento de Fondos

Semestre	Anualidades de Imposición	Servicio de Intereses	Capital Formado	
			Parcial	Total
0	----------	----------	----------	-----------
1	483.73	----------	483.73	483.73
2	583.73	29.02	612.75	1096.12
3	683.73	65.75	749.49	1845.60
4	783.73	110.41	894.47	2740.09
5	883.73	164.41	1048.14	3888.23
6	983.73	227.29	1211.02	5000

Ejercicio 2:

Datos

${}^{/}C_n^{\ g} = 5000$
n= 3 años
i= 0.12 anual
d= **-** 100
Depósitos semestrales vencidas decrecientes

a)

$S_{6/0.06} = \frac{0.06}{1.06^6 - 1}$

$S_{6/0.06} = 0.14336$

a= $S_{n/i}^{-1}\left({}^{/}C_n^{\ g} + \frac{n*d}{i}\right) - \frac{d}{i}$

a= 5000 $\left(5000 + \frac{6*(-100)}{0.06}\right) + \frac{100}{0.06}$

a= 0.14336 *(-15000)+1666.67

a= 949.87

b)

Cuadro de Movimiento de Fondos

Semestre	Anualidades de Imposición	Servicio de Intereses	Capital Formado	
			Parcial	Total
0	----------	----------	----------	----------
1	949.87	----------	949.87	949.87
2	849.87	56.49	906.86	1856.73
3	749.87	111.41	861.27	2718.01
4	649.87	163.08	812.95	3530.96
5	549.87	211.86	761.73	4292.68
6	449.87	257.56	707.43	5000

Ejercicio 3:

<u>Datos</u>

${}^{/}C_n{}^{g} = 5000$

n= 3 años

i= 0.12 anual

d= 100

Depósitos semestrales adelantados crecientes

a)

$$S_{6/0.06} = \frac{0.06}{1.06^6 - 1}$$

$$S_{6/0.06} = 0.14336$$

$$a = S_{n/i}^{-1}\left(\frac{{}^{/}C_n{}^{g}}{(1+i)} + \frac{n*d}{i}\right) - \frac{d}{i}$$

$$a = 0.14336\left(\frac{5000}{1.06} + \frac{6*100}{0.06}\right) - \frac{100}{0.06}$$

a = 0.14336 * (14716.98) - 1666.67

a = 443.16

b)

Cuadro de Movimiento de Fondos

semestre	Anualidades de Imposición	Servicio de Intereses	Capital Formado	
			Parcial	Total
0	443.16		443.16	443.16
1	543.16	26.59	569.75	1012.91
2	643.16	60.77	703.93	1716.84
3	743.16	103.01	846.17	2563.01
4	843.16	153.78	996.94	3559.95
5	943.16	213.59	1156.76	4716.71
6		283.01		5000

Ejercicio 4:

Datos

$^{/}C_n^{\,g} = 5000$
n= 3 años
i= 0.12 anual
d= **-** 100
Depósitos semestrales adelantados decrecientes

a)

$$S_{6/0.06} = \frac{0.06}{1.06^6 - 1}$$

$$S_{6/0.06} = 0.14336$$

$$a = S_{n/i}^{-1}\left(\frac{^{/}C_n^{\,g}}{(1+i)} + \frac{n*d}{i}\right) - \frac{d}{i}$$

$$a = 0.14336\left(\frac{5000}{1.06} + \frac{6*(-100)}{0.06}\right) - \frac{(-100)}{0.06}$$

a = 0.14336 * (-5283.02) - 1666.67

a = 990.30

b)

Cuadro de Movimiento de Fondos

Semestre	Anualidades de Imposición	Servicio de Intereses	Capital Formado	
			Parcial	Total
0	990.30	----------	990.30	990.30
1	890.30	54.55	863.86	1773.16
2	790.30	106.39	815.69	2588.85
3	690.30	155.33	764.63	3353.48
4	590.30	201.21	710.51	4063.98
5	490.30	243.84	653.14	4717.12
6	----------	283.03	----------	5000

Tema No 7

ANUALIDADES DE AMORTIZACIÓN

1.- Concepto y Generalidades

2.- Sistema Francés

1.- Hemos visto las anualidades que tratan de formar un capital, y hemos calculado el valor final que lo intereses que perciben se van capitalizando periodo tras periodo.

Ahora veremos las anualidades que tratan de escindir una deuda que devenga intereses los cuales son pagados periodo tras periodo junto con las amortizaciones del capital a las
Denominadas anualidades de amortización.

El sistema de amortización francés es muy utilizado en nuestro medio por las mutuales de ahorro y crédito el sistema de amortización americano es utilizado principalmente por la barra de formato industrial, Nacional y Extranjero.

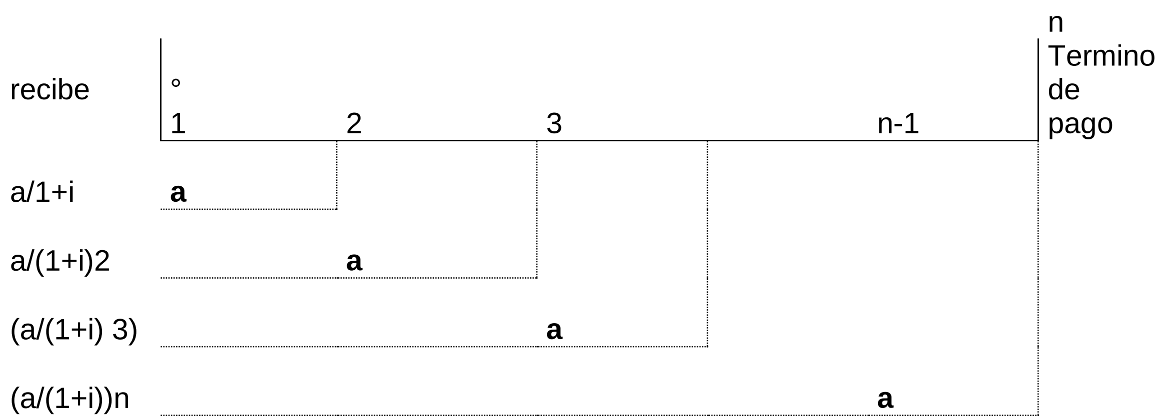
El sistema de amortización comercial es utilizando por la banca de comercio de nuestro medio y consiste en que las amortizaciones en el capital son constantes mientras que las anualidades de amortización en razón aritmética.

2.- Sistema de Amortización Francés

Las anualidades de amortización son constantes y comprenden la amortización del capital y el interés del capital adeudado.

Como periodo tras periodo el saldo adeudado va disminuyendo, disminuye el interés y aumenta la amortización del capital.

Simbología
Co= Capital Prestado
a=Anualidades de Amortización
n= # de amortizaciones y tiempo de préstamo
i= tasa o tipo de interés
(1+i) = factor de capitalización
$\frac{1}{1+i}$ = factor de actualización



$\sum$ = Co

Ecuación Fundamental

$$Co=\frac{a}{(1+i)}+\frac{a}{(1+i)^2}+\frac{a}{(1+i)^3}+\ldots\ldots\ldots.+\frac{a}{(1+i)^n}$$

-

$$Co=\frac{a(1+i)^{n-1}+a(1+i)^{n-2}+a(1+i)^{n-3}+\ldots\ldots.+a}{\frac{a}{(1+i)^n}}$$

$$Co=\frac{a\ (1+i)^{n-1}}{\frac{i}{(1+i)^n}}$$

$$Co=\frac{a\ (1+i)^{n-1}}{\frac{i}{(1+i)^n}}*i$$

$$Co=\frac{(1+i)-n}{(1+i)-n}$$

$$Co=\frac{a\ \ 1-(1*i)^{-n}}{i}$$

$$a=Co\ \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Calculo de "n"

$$Co=\frac{a\ (1+i)^n-1}{(1+i)^n*i}$$

$$(1+i)^n\ Co\ i=a(1+i)^n-a$$

$$(1+i)^n\ Co*i-a\ (1+i)^n=-a$$

$$(1+i)^n\ (Co*i-a)=-a$$

$$(1+i)^n=\frac{a}{Co*i-a}$$

$$n\log(1+i)=\log\left(\frac{-a}{(Co\ i-a)}\right)$$

$$n=\frac{\log\ \frac{(\ \ -a)}{(Co\ i-a)}}{\text{Log}\ \ (1+i)}$$

Segunda Forma

(Co * i = a) $\frac{Co * i}{a} = 1 - (1+i)^{-n}$

$(1+i)^{-n} = 1+(1+i)^{-n}$

$(1+i)^{n} = \frac{1}{1 - \frac{Co * i}{n}}$

$n \log (1+i) = \log \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{Co * i}{a}\right)} \right)$

$n = \frac{\log \frac{1}{1 - \frac{Co * i}{a}}}{\log (1+i)}$

$n = \frac{\log \frac{1}{1 - \frac{Co * i}{a}}}{\log (1+i)}$

Ejemplo Numérico

Co = $us 5000

n= 3 años 6 semestres

i= 0.12 0.06 Semestral

Depósitos semestrales vencidas

a=?

Cuadro de Amortizaciòn

$a = 5000 \frac{0.06}{1-1.06^{-6}}$

$a = 5000 \frac{0.06}{0.29503946}$

a= 5000* 0.203362628

a= 1016.81

Cuadro de Amortización Sistema Francés

Semestre	Capital por Amortización	Anualidad de Imposición	Servicio de Interés	Capital Formado	
				Parcial	Total
0	5000				
1	4283,19	1.016,81	300,00	716,81	716,81
2	3.523,48	1.016,81	256,99	759,82	1.476,63
3	2717,98	1.016,81	211,41	805,40	2.282,03
4	1864,24	1.016,81	163,08	853,73	3.135,76
5	959,28	1.016,81	111,85	904,96	4.040,72
6		1.016,81	57,56	959,25	5.000,00

Datos

Co=20000

n= 2 años * 4 = 8 trimestres

i= 0.18 anual 0.045 trimestral

Solución

$$a=20000 * \frac{0.045}{1-1.045^{-8}}$$

$$a= 20000 * \frac{0.045}{0.29681}$$

a= 20000 * 0.15161

a= 3032.19

Cuadro de Amortización Sistema Francés

Semestre	Capital por Amortización	Anualidad de Imposición	Servicio de Interés	Capital Formado	
				Parcial	Total
0	20000				
1	17.867,81	3.032,19	900,00	2.132,19	2.132,19
2	15.639,67	3.032,19	804,05	2.228,14	4.360,33
3	13.311,27	3.032,19	703,79	2.328,40	6.688,73
4	10.878,08	3.032,19	599,01	2.433,18	9.121,92
5	8.335,41	3.032,19	489,51	2.542,68	11.664,59
6	5.678,31	3.032,19	375,09	2.657,10	14.321,69
7	2.901,64	3.032,19	255,52	2.776,67	17.098,36
8		3.032,19	130,57	2.901,62	20.000,00

Ejemplo 3

Co= 25000
i= 11 % = 0.11 Anual = 0.055
n= 3 años = 6 Semestres

Pasos Semestrales

Solución

$$a=25000 \frac{0.055}{1-(1+0.055)^{-6}}$$

a= 25000 * 0.200178947

a= 5004.47

Cuadro de Amortización

Semestre	Capital por Amortización	Anualidad de Imposición	Servicio de Interés	Capital Formado	
				Parcial	Total
0	25000				
1	21370,53	5.004,47	1.375,00	3.629,47	3.629,47
2	17.541,44	5.004,47	1.175,38	3.829,09	7.458,56
3	13501,75	5.004,47	964,78	4.039,69	11.498,25
4	9239,88	5.004,47	742,59	4.261,88	15.760,13
5	4743,6	5.004,47	508,19	4.496,28	20.256,41
6		5.004,47	260,89	4.743,58	24.999,99

ANUALIDADES DE AMORTIZACION

SISTEMA COMERCIAL

1. Concepto 2. Simbología 3. Deducción de la Fórmula, 4. Problemas

1. CONCEPTO

   Son anualidades decrecientes en razón aritmética de manera que las amortizaciones son constantes periodo tras periodo.

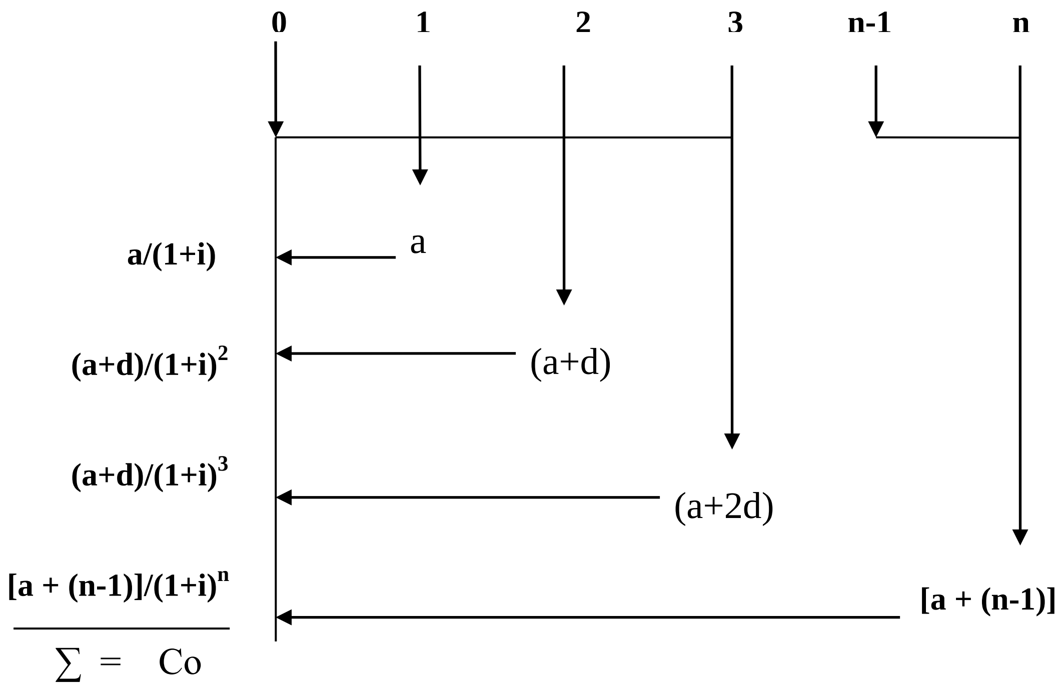
   Este sistema de amortización es el que utiliza, en nuestro medito, la banca comercial.

   Por este sistema, el prestatario llega a pagar menos interés que con el sistema francés que utilizan las mutuales de ahorro y préstamo.

2. SIMBOLOGIA

   Co = Capital prestado
   n = Número de anualidades y tiempo de préstamo
   i = tasa o tipo de interés
   a = Primera anualidad de amortización
   d = Razón aritmética decreciente.

3. EDUCCION DE LA FORMULA



Ecuación Fundamental:

$$\boxed{Co = a/(1+i) + (a+d)/(1+i)^2 + (a+2d)/(1+i)^3 + \ldots + [a + (n-1)]/(1+i)^n}$$

Pero, como las amortizaciones son constantes:

$$a/(1+i) = (a+d)/(1+i)^2 = (a+2d)/(1+i)^3 = \ldots = [a + (n-1)]/(1+i)^n$$

De donde: $Co = n\ a/(1+i)$

Despejando "a", tenemos:

$$a = Co/n\ (1+i) = Co/n + Co.i/n = Co\ (1/n + i/n)$$

Pero, como "a" es la primera anualidad, entonces n =1, de donde:

$$\boxed{a = Co\ (1/n + i)}$$

Primera anualidad de amortización

La razón aritmética será:

$$\boxed{d = Co.i/n}$$

Razón aritmética decreciente

4. PROBLEMAS

Un comerciante requiere un préstamo de $us. 28.000, pagadero mediante anualidades trimestrales vencidas decrecientes en razón aritmética, durante dos años. Si la tasa de interés que paga el banco es del 14% anual:

a. Hallar la primera anualidad de amortización
b. Hallar la razón aritmética decreciente
c. Construir el Estado de Amortización

DATOS: Co = 28.000 n = 2 años = 8 trimestres

i = 0,14 anual = 0,035 trimestral

a = 28.000 (1/8 + 0,035) = 28.000 + 0,16 = **$ 4.480,00**

d = 28.000 * 0,035/8 = $ **122,5**

CUADRO DE AMORTIZACION: SISTEMA COMERCIAL

Co = **28,000.00** n = **8** i = **0.035**

d = **122.50**

Trimestres	Capital Prestado	Anualidad de Amortizacion	Servicio de Intertereses	AMORTIZACION Parcial	AMORTIZACION Total
0	28,000.00				
1	24,500.00	4,480.00	980.00	3,500.00	3,500.00
2	21,000.00	4,357.50	857.50	3,500.00	7,000.00
3	17,500.00	4,235.00	735.00	3,500.00	10,500.00
4	14,000.00	4,112.50	612.50	3,500.00	14,000.00
5	10,500.00	3,990.00	490.00	3,500.00	17,500.00
6	7,000.00	3,867.50	367.50	3,500.00	21,000.00
7	3,500.00	3,745.00	245.00	3,500.00	24,500.00
8	-	3,622.50	122.50	3,500.00	28,000.00

Tema No. 8

USUFRUCTO

1. Usufructo.- Es el valor actual de los flujos netos que puede producir una inversión cada periodo dos o más periodos. Sirve para el valor nominal, pagos petroleros, hoteleros, valoración de minas.

Simbología:

U = Usufructo
FN = flujo neto del periodo (anual)
i = Costo de oportunidad del dinero (TPP)
n = Numero de periodos

$$\boxed{U = FN\,\frac{1-(1+i)^{n}}{i}}$$

Donde:
FN_i = Flujo neto del año 1
FN_j = Flujo neto del año r
J = 1, 2, 3, 4, 5,,,,,,,,,,,,,,,,,,,n

$$\frac{1}{(1+i)} = \text{Factor de actualización}$$

$$U = \frac{FN1}{(1+i)} + \frac{FN2}{(1+i)\ 2} + \frac{FN3}{(1+i)\ 3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{FNn}{(1+i)\ n}$$

$$U = \frac{FNj}{(1+i)\ j} \Rightarrow FN1\ \#\ FN2\ \#\ldots\ldots\ldots\ldots\#\ FNn$$

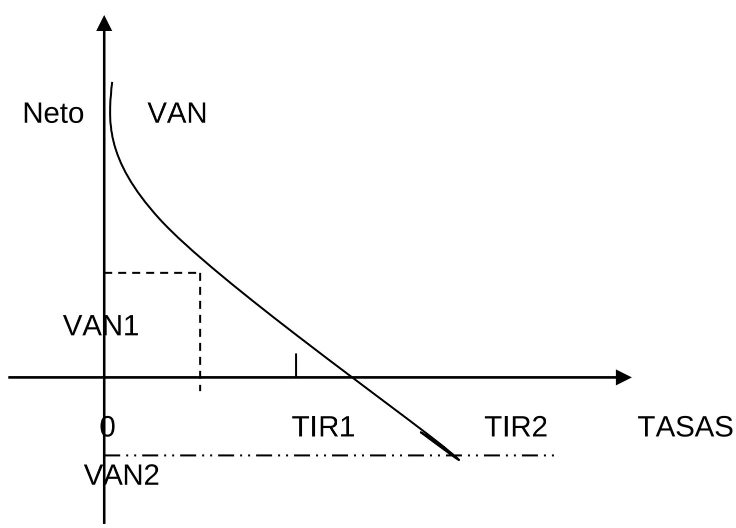
2. Valor Actual Neto (VAN).- es el valor monetario que reporta una inversión después de reportar o devolver el costo de oportunidad del dinero.

Io = Inversión inicial precio de activo

VAN = Valor Actual Neto

$$\boxed{VAN = U -}$$

Si:
VAN > 0 si
VAN = 0 si ó no
VAN < 0 no



3. Tasa Interna de Retorno (TIR).- Esa la tasa que hace cero al VAN, es la tasa que iguala al usufructo con la inversión.

$\underline{TIR - TIR_1} = \underline{VAN}$

$TIR_2 – TIR_1 \quad VAN_2 – VAN_1$

$$TIR = TIR + (TIR1-TIR2)\ \frac{VAN}{VAN2 - VAN1}$$

TIR => VAN = 0
TIR => U = Iu

Ejemplo

Quieren vendernos un hotel en Trinidad en el Beni a $us. 1´500.000,-, bajo el argumento que dicho hotel puede producir un flujo neto anual de $us. 250.000,-, durante 15 años. Si el costo de oportunidad del dinero por la TPP es del 11% anual:

a) Hallar la tasa efectiva si la capitalización es trimestral.
b) Utilizar la tasa efectiva y decidir si ó no conviene la compra.
c) Hallar el valor actual neto. (VAN)
d) Hallar la tasa interna de retorno. (TIR).

DATOS

Io = $us. 1´500.000,-
FN = $us. 250.000,-
n = 15 años => 0,11 anual nominal
Capital Trimestral

a) $ie = (1 + \frac{in}{n}) -1$

$$ie = \left(1 + \frac{0,11}{4}\right)^4 - 1$$

$$ie = 0,1146$$

b) $U = FN\ \frac{1 – (1 + I)^{-n}}{i}$

$$U = 250.000,- \times \frac{1 – (1 + 0,1146)^{-15}}{0,1146}$$

U = 250.000 x 7,0119
U = 1´752.982,14
U > Iu conviene

c) VAN = U – Iu

VAN = 1´752.982,14 – 1´500.000,-
VAN = 252.982,14 > 0 si

d) $U.\ 20\% = 250.000,- \times \frac{1 – (1 + 0,20)^{-15}}{0,20}$

U = 1´168.868,16

TIR = 1´168.868,16

VAN_2 = 1´168.868,16 – 1´500.00,-
VAN_2 = - 331.131,84

$$TIR = 11{,}46 + (11{,}46 - 20)\frac{252.982{,}14}{-331.131{,}84 - 252.982{,}14}$$

$$TIR = 11{,}46 + (-8{,}54)\frac{252.982{,}14}{-584.113{,}98}$$

TIR = 11,46 + 3,7 = 15,16% > 11,46

Ejemplo

Quieren vendernos una Universidad acreditada Internacionalmente en $su. 5´000.000,-, realizadas nuestras averiguaciones dicha Universidad, puede generar un flujo general 400.0,- durante 20 años, si el costo de oportunidad del dinero es de 9% anual una capitalización mensual.

a) Hallar la tasa efectiva del costo de oportunidad.
b) Hallar el usufructo, decidir si conviene o no la compra.
c) Confirmar la decisión analizando el valor actual neto.
d) Hallar la tasa interna de retorno.

DATOS

Io = $us. 5´000.000,-
FN = $us. 400.000,-
n = 20 años
i = 0,09

Capitalización mensual

a) $$ie = \left(1 + \frac{i*n}{n}\right)^{n} - 1$$

$$ie = \left(1+ \frac{0.09}{12}\right)^{12} - 1$$

ie = 0.0938

b) $$U = FN\,\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$U = 5´000.000,\text{-} \times \frac{1 - (1 + 0.0938)^{-20}}{0.0938}$$

U = 5´000.000,- x 3,2496

U = 16´298.000 Conviene

c) V AN = U – Iu
VAN = 16´298.000,- - 5´000.000,-
VAN = 3´370.200,- > 0 si

Tema No 10

METODO DE DEPRECIACION

- CONCEPTO
- METODO PROPORCIONALES
- METODO DE REDUCCION UNIFORME
- METODO DEL INTERES COMPUESTO

1. CONCEPTO

Depreciación es la pérdida de valor de los activos por:

- Uso y desgaste
- Obsolencia
- Simple paso del tiempo
- Agotamiento
- Eventos contingentes

2. METODO PROPORCIONALES

METODO DIRECTO

Por este método la depreciación es proporcional a la vida útil en año del activo. Es el método que sugiere la ley 843.

EDIFICIO	40 años	2.5%	Anual
EQUIPO	10 años	10%	
MUEBLES Y ENSERES	10 años	10%	
MAQUINARIAS	8 años	12.5%	
HERRAMIENTAS	4 años	25%	
VEHICULO	5 años	20%	
COMPUTADORA	4 años	25%	

R = Anualidad de depreciación
C = Costo original

$$\boxed{R = \frac{c - s}{n}}$$

EJEMPLO

C = 18000

S = 3000

n = 5 años

$$R = \frac{18000 - 3000}{5} = 3000$$

CUADRO DE DEPRECIACION

AÑOS	ANUALIDAD DE DEPRECIACION	DEPRECIACION ACUMUILADA	VALOR EN LIBROS
0			18000
1	3000	3000	15000
2	3000	6000	12000
3	3000	9000	9000
4	3000	12000	6000
5	3000	18000	3000

Valor residual 3000 es el valor que tiene el activo después de sus años de vida útil.

METODO DE RENDIMIENTO

El activo se deprecia según la cantidad de unidades que produce.

n = es la vida útil en unidades de producción o producto
r = depreciación por unidad
N = numero de unidades producidas por el activo a un determinado tiempo

$$r = \frac{c - s}{n}$$

$$R = r * n$$

EJEMPLO

C = -18000

S = 3000

n = 350000Km

N = 140000Km

$$r = \frac{18000 - 3000}{350000}$$

$$r = \frac{15000}{350000} = 0.04286\text{Km}$$

R = 0.04286 * 140000 = 6000
VchL = 18000 – 6000 = 12000

METODO DEL SERVICIO

El método consiste en que el activo se deprecia según la cantidad de horas que funciona como por ejemplo; luminarias pantallas.

$$r = \frac{c - s}{n}$$

$$R = N * r$$

METODO DE REDUCCION UNIFORME

a **) Método de lo Números Dígitos**

Las anualidades de depreciación decrecen en razón aritmética. El método es aplicable a activos que demandan cada vez mayor costo de mantenimiento y reparación como por ejemplo; maquinas, vehículos.

C = Costo original
S = Valor residual
N = vida útil

$\sum$Yi = Suma de los dígitos de los año de vida útil
R_1 = Primera anualidad de depreciación
d = Razón aritmética decreciente

$$R_1 = (C\text{-}S)\ \frac{n}{\sum Y_i}$$

$$d = (C\text{-}S)\ \frac{1}{\sum Y_i}$$

EJEMPLO

C= 18000 a) Primera anualidad de depreciación
n= 5 años b) Razón Aritmética decreciente
S = 4000 c) Cuadro de depreciación

a) $R_1 = (18000\text{-}4000)\ \frac{5}{15}$

$\sum$Yi = 1+2+3+4+5 = 15

R_1 = 1400*0.33333

R_1 = 4666.67

b) $d = (18000\text{-}4000)\ \frac{1}{15}$

$d = 14000\ \frac{1}{15}$

d = 933.33

CUADRO DE DEPRECIACION

AÑOS	ANUALIDAD DE DEPRECIACION	DEPRECIACION ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0			18000
1	4666.67	4666.67	13333.33
2	3733.33	8400.00	9600
3	2800.00	11200	6800
4	1866.66	13066.67	4933.33
5	933.33	14000	4000

b) METODO DE LA TASA CONSTANTE

Las anualidades decrecen en un porcentaje fijo o tasa de depreciación

d = Tasa de depreciación

DEDUCCION DE LA FORMULA

AÑOS	DEPRECIACION ANUAL	VALOR EN LIBROS
0		e c
1	Col	
2	c(1-d)d	c(1-d) – c (1-d) =c(1-d)(1-d) = c $(1-d)^2$
3	c $(1-d)^2$ d	c $(1-d)^2$ - c $(1-d)^2$ =c $(1-d)^2$ (1-d) =c $(1-d)^3$

N	$c(1-d)^{n-1}d$	$c(1-d)^{n-1}$ - $c(1-d)^{n-1}d$ =$c(1-d)^{n-1}$ (1-d) = $(1-d)^n$ = S

S = $(1-d)^n$	$\sqrt[n]{\frac{S}{C}}$ = 1-d

d = 1- $\sqrt[n]{\frac{S}{C}}$

Tasa de depreciación

EJEMPLO

C = 18000 d= 1- $\sqrt[5]{\frac{4000}{18000}}$

S = 4000
n = 5 años d = 1- 0.74021 = 0.259785
d = ?
cuadro = ?

CUADRO DE DEPRECIACION

AÑOS	**ANUALIDAD DE DEPRECIACION**	**DEPRECIACION ACUMUILADA**	**VALOR EN LIBROS**
0			18000.00
1	4676.14	4676.14	13323.86
2	3461.35	8137.49	9862.51
3	2562.13	10699,62	7300.38
4	1896.53	12596.15	5403.85
5	1403.84	14000.00	4000.00

3. METODO DEL INTERES COMPUESTO

a) METODO DEL FONDE DE AMORTIZACION

Las anualidades se depositan en una cuenta de ahorro o PDF y por tanto ganan interese con los cuales se "ayuda" a formar un capital de reposición del activo.

R = $\frac{C-S}{\sum n/i}$

$\sum n/i \quad \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

EJEMPLO

C = 18000 $\qquad \sum 5/_{0.10} = \frac{1.10^5 - 1}{0.10^5} = 6.1051$

S = 4000

n = 5 años $\qquad R = \frac{18000 - 4000}{6.1051} = 2293.16$

i = 0.10 anual

CUADRO DE DEPRECIACION

i = 0.10

AÑOS	ANUALIDAD DE DEPRECIACION	SERVICIO DE INTERES	FONDO DE PARCIAL	AMOTIZACION TOTAL	VALOR EN LIBROS
0					18000.00
1	2293.16	-	2293.16	2293.16	15706.84
2	2293.16	224.32	2522.48	4815.64	13184.36
3	2293.16	481.56	2774.72	7590.36	10409.64
4	2293.16	259.04	3052.30	10642.56	7357.44
5	2293.16	1064.26	3357.41	14000.00	4000.00

b**) FONDO DE AMORTIZACION CON CAPITALIZACION DE INTERES SOBRE EL COSTO**

Se pide que el activo "devuelva" su depreciación y los interese que dejo de ganar el dinero invertido en el.

$$\boxed{R = \frac{c\ (1+i)^n - s}{\sum n/_i}}$$

$\sum 5/_{0.10} = \frac{1.10^5 - 1}{0.10} = 6.1051 \qquad R = \frac{18000 * 1.10^5 - 4000}{6.1051} = 4043.16$

CUADRO DE DEPRECIACION Y MOVIMIENTO DE FONDOS

i = 0.10 para el otro interés 0.08%

AÑOS	ANUALIDAD DE DEPRECIACION	SERVICIO DE INTERES	FONDO DE PARCIAL	AMOTIZACION TOTAL	VALOR EN LIBROS
0					-18000.00
1	4093.16	1800.00	2293.16	2293.16	15706.84
2	4093.16	1570.68	2522.48	4815.64	13184.36
3	4093.16	1318.44	2774.72	7590.33	10409.64
4	4093.16	1040.96	3052.30	10642.56	7357.44
5	4093.16	735.74	3357.41	14000.00	4000.00

$$R = \frac{C\ (1+i)^n - s}{\sum n/_i}$$

$\sum 10/_{0.08} = \frac{(1+0.08)^{10} - 1}{0.08} = 14.48656247 \qquad R = \frac{50000 * 1.08^5 - 4000}{14.48656247} = 4795.23$

Tema No. 11

MATEMATICAS ACTUARIALES

1. CONCEPTO Y GENERALIDADES

La matemática actuarial es el tratamiento matemático de las anualidades inciertas. Es decir, la matemática actuarial trata de establecer el valor económico de una anualidad cuyo inicio y/o final depende de eventos contingentes y, por tanto, son hechos probabilísticas. Las anualidades pueden ser “primas anuales” o “rentas vitalicias” que deben ser costeadas por el beneficiario en su etapa de vida activa: mientras pueda trabajar.

La matemática actuarial tiene por objeto la evaluación matemática de los sucesos o acontecimientos aleatorios en base a experiencias y estadísticas recogidas en determinados periodos de tiempo que podrían ser anuales, etc., cuyas frecuencias se proyectan a futuro asignándoles valores económicos.

Existen riesgos inherentes a la integridad física y la vida de las personas, tales como son los accidentes de trabajo, de tránsito, que producen la invalidez o incapacidad para el trabajo en forma temporal o permanente, enfermedades en general, muerte, vejez y otros, los cuales impiden una subsistencia normal de las personas por causa de impedimento en la actividad laboral y consiguiente pérdida de salario. Para la necesidad de ponerse a cubierto de las pérdidas materiales ocasionada por los riesgos descritos, así como para la incapacidad de seguir en el servicio laboral, se ha instituido el SEGURO y/o las RENTAS VITALICIAS.

Estas anualidades o rentas que sirven para pagar un seguro o para cobrar un seguro, son calculadas con la ayuda de Tablas de Mortalidad y Tablas de Conmutación.

2. TABLAS DE MORTALIDAD

Una tabla de mortalidad es básicamente, un registro estadístico de un número suficientemente grande de personas, con los siguientes datos: Edad, número de vivos, numero de muertos cada año y edad al morir. Estos datos se tabulan y procesándolos se puede deducir, entre otros datos, la probabilidad de vida y la probabilidad de muerte entre distintas edades de las personas del grupo representativo de las tablas.

Cada conglomerado social, cada grupo de trabajadores debería tener su propia tabla de mortalidad. No es lo mismo una tabla de mortalidad para los maestros urbanos que una tabla de mortalidad para los chóferes de transporte pesado. Seguramente, entre los chóferes de transporte pesado existe mayor probabilidad de muerte que entre los maestros urbanos por las características y condiciones de ambas ocupaciones.

TABLA DE MORTALIDAD

Edad x	**Número de vivos a la edad x** $l_x =$	**Número de muertos a la edad x** $d_x = l_x – l_{x-1}$	**Probabilidad anual de morir antes de x+1** $q_x = d_x / l_x$	**Probabilidad anual de vivir hasta x+1** $p_x = l_{x+1} / l_x$
1	1.000.000	5.770	0.00577	0,99423
2	994.230	4.116	0.00414	0.99586
3	990.114	3.347	0.00338	0.99662
…..	…	…	…	…
98	454	329	0,72467	0,27533
99	125	125	1.00000	0.00000

2.1 DISPOSICION DE LAS TABLAS DE MORTALIDAD

Columna Edad x: Contiene las edades desde 1 hasta 99 años. 99 es la edad límite w.

Columna l_x: Número de personas que están vivas al comienzo de año en que cumplen la edad.
Así, l_{98} = 454 personas.

Columna d_x: Número de personas que han muerto entre la edad x y la edad x+1. Así, d_{98} = 329, es decir: ($l_{98} - l_{99}$ => 454 – 125 = 329)

Columna q_x: Es la probabilidad de que una persona de edad x muera antes de cumplir la edad x+1. Así q_{98} = 0,72467, es decir (d_{98} / l_{98} => 329 / 454 = 0,72467) ó [($l_{98} - l_{99}$) / l_{98}] => [454 – 125 / 454 = 0,72467]

Columna p_x: Es la probabilidad de que una persona de edad x viva hasta cumplir la edad x+1. Así p_{98} = 0.27533, es decir (l_{99} / l_{98} => 125 / 454 = 0,27533).

Definición de **probabilidad: "***Numero que mide objetivamente el grado de creencia en que un suceso se verifique, es decir la relación entre el numero de los casos favorables y el de los casos contrarios de un evento"* se tiene: $p_x + q_x = 1$

2.2 ALGUNAS RELACIONES IMPORTANTES ENTRE LOS VALORES DE LAS TABLAS DE MORTALIDAD

l_x = El número de personas vivas a la edad x, es igual a la suma de las personas que fallecerán hasta la edad final de la tabla.

$$l_x = d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + d_{x+3} \ldots\ldots\ldots\ldots + d_w$$

Sumando las relaciones:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

$$d_{x+1} = l_{x+1} - l_{x+2} \ldots\ldots$$

$$d_{x+n-1} = l_{x+n-1} - l_{x+n}$$ de donde, se tiene:

$$l_x - l_{x+n} = + d_x + d_{x+1} + d_{x+2} \ldots\ldots\ldots\ldots + d_{x+n-1}$$

La función de Supervivencia "S(x)": Determina las probabilidades de supervivencia para cada una de las edades de personas pertenecientes a un grupo inicial. Su principal característica resulta ser la concentración de mayores porcentajes de mortalidad para casos de edades extremas, es decir tanto para los primeros como últimos años de vida.

X representa la edad de una persona, S(x) la probabilidad de sobrevivir en función de x, donde x puede variar desde 0 hasta la edad limite "w" en la cual se supone que no hay mas sobrevivientes del grupo inicial, se tiene:

$$S(x) = \frac{1}{10}\sqrt{100 - x}$$

Donde: $lx = k * S(x)$ k = constante llamada radix

Ej. Si la función de supervivencia esta representada por la siguiente ecuación: $\mathbf{S_{(x)} = \frac{1}{10}\sqrt{100 - x}}$

Y el radix por 100.000 individuos de edad 0 ¿Cómo construiría usted una Tabla de mortalidad para los primeros 4 años de vida?

Solución

$l_1 = 100.000 * \frac{1}{10} \sqrt{100-1}$ $\quad$ $l_2 = 100.000 * \frac{1}{10} \sqrt{100-2}$ $\quad$ $l_3 = 100.000 * \frac{1}{10} \sqrt{100-3}$

$l_1 = 99.499$ $\quad$ $l_2 = 98.995$ $\quad$ $l_3 = 98.489$

$l_4 = 100.000 * \frac{1}{10} \sqrt{100-4}$

$l_4 = 97.980$

Tabla de mortalidad para la función y radix

Edad x	lx	dx
0	100.000	501
1	99.499	504
2	98.995	506
3	98.489	509
4	97.980	512

2.3 PROBABILIDAD DE VIDA Y MUERTE PARA PERIODOS MAYORES A UN AÑO

- **Probabilidad de vida:** La probabilidad de que una persona de edad x viva al menos hasta la edad (x+n).

$$\boxed{{}_n p_x = l_{x+n} / l_x}$$

Ej 1: Hallar la probabilidad de que un hombre de 35 años viva al menos hasta los 55 años:

${}_{20}p_{35} = \mathbf{l_{55} / l_{35}}$ (Utilizando la tabla de mortalidad)
${}_{20}p_{35} =$ **754.191/ 906.554**
${}_{20}p_{35} =$ **0,8319 o sea 83,19%**

- **Probabilidad de muerte:** La probabilidad de que una persona de edad x muera antes de cumplir la edad (x+n).

$$\boxed{{}_n q_x = (l_x - l_{x+n}) / l_x}$$

Ej 2: Hallar la probabilidad de que un hombre de 25 años muera antes de cumplir 35 años:

${}_{10}q_{25} = \mathbf{(l_{25} - l_{35}) / l_{25}}$
${}_{10}q_{25} = (939.197 – 906.554) / 939.197$
${}_{10}q_{25} =$ **0,035 o sea 3,5%**

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Para un grupo de 100 personas vivas, todas ellas de 20 años tenemos el símbolo l_{20} = 100.000 y supongamos que las tasas de mortalidad para las edades de 20, 21, 22 y 23 son de 0,0015; 0,0018;

0,0020; 0,0023 respectivamente, se desea conocer las columnas de la tabla correspondiente a l_x, d_x, p_x.

2) Si la función de supervivencia esta representada por la ecuación $S(x) = 1 - 0{,}00391111x - 0{,}00008x^2$ construya las columnas correspondientes a lx, y dx si las edades se consideran para 0, 1, 2 y 3 años y la población inicial igual a un millón.
3) Si los datos de una tabla de mortalidad son los siguientes: como se deducirían los valores correspondientes a: dx, qx, px

x	95	96	97	98	99	100	101
l_x	730	410	200	89	32	9	0

4) Utilizando la ecuación $l_{30} - l_{35} = d_{30} + d_{31} + d_{32} + d_{33} + d_{34}$ y los valores de la tabla de mortalidad compruebe la igualdad.
5) Utilizando el resultado del ejercicio 4, encuentre la probabilidad de que una persona de 30 años muera antes de alcanzar la edad de 35 años.
6) En base a los datos del ejercicio 3, encuentre la probabilidad que una persona de 96 años muera entre las edades de 98 y 100 años
7) ¿Qué probabilidades tiene un individuo de 40 años de edad y sujeto a la tabla de mortalidad de morir entre las edades de 50 y 55 años y de 70 a 75 años?
8) Si consideramos los datos contenidos en la siguiente tabla de mortalidad y un radix de un millón determine las columnas: lx, px, dx, qx

X	0	1	2	3
q_x	0,015	0,009	0,006	0,002

9) Utilizando la tabla de mortalidad calcule los resultados de las siguientes probabilidades:
   a) Que una persona de 20 años viva por lo menos 35 años mas
   b) Que una persona de 20 años muera en el transcurso de los próximos 35 años
   c) Que una persona de 20 años muera al 35avo año a partir de la fecha
   d) Que una persona de 20 años muera entre las edades de 55 y 75 años
   e) Que una persona de 20 años no muera entre las edades de 55 y 75 años
10) Según la tabla de mortalidad ¿Cuál será la edad en que mas probablemente morirá una persona que ahora tiene 37 años, y a esa edad cual será su probabilidad de morir en términos porcentuales?

3. Tablas de Conmutación

Las tablas de conmutaciones son un método numérico útil para el cálculo de los seguros de vida, cuando se cuenta como máximo con una calculadora o una computadora de muy baja memoria. En base a las tablas, hacemos sólo operaciones aritméticas simples.

Sin embargo, con la capacidad de las computadoras actuales, y siendo que toda la información que está en las tablas de conmutaciones está contenida en la tabla de mortalidad y en la tasa de interés que usemos, podemos hacer los mismos cálculos en forma directa. El hecho que la computadora tenga que hacer varias veces la misma sumatoria no nos afecta significativamente en el tiempo de cálculo.
Sacando el tema de las conmutaciones, que no es más que un método numérico válido para determinada situación hoy superada, los cálculos asociados a seguros de vida quedan en un problema básicamente de probabilidad.

Y tenemos la ventaja adicional que las fórmulas ganan en claridad. Es interesante, porque existen conmutaciones para diferentes sistemas de variación de capital, para devolución de primas pagadas, y para seguros y rentas para varias vidas conjuntas. Una inmensa teoría, verdaderamente ingeniosa, hoy su valor es básicamente histórico, por más que todavía estén en los programas de algunas universidades y algunas compañías de seguros continúen usándolas como sistema de cálculo. Se acompaña un texto que muestra cómo puede hacerse un cálculo básico de vida (obviamente, para el caso, sin los recargos de administración y comisiones) directamente a partir de la tabla de mortalidad, sin necesidad de pasar por el método de las conmutaciones. Imagine la facilidad para calcular seguros a capital variable, varias cabezas, devolución de primas, etc.

Las tablas de conmutación proporcionan el valor actual, al costo de oportunidad del dinero que puede estar dado por la Tasa Pasiva Promedio del mercado TPP, publicada por el Banco Central de cada país:

Dx = es el valor actual del número de personas vivas a la edad x,

Nx = es la suma de los valores actuales de las personas vivas desde la edad x hasta la edad límite w.

Así: $\boxed{Dx = v^{x} * l_{x} \quad \text{donde} \quad v^{x} = (1+i)^{-x}}$ y $\boxed{N_{x} = D_{x} + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots\ldots + D_{w}}$

De la misma manera:

Cx = es el valor actual del número de personas muertas a la edad x.

Mx = es la suma de los valores actuales de las personas muertas desde la edad x hasta la edad límite w.

Así: $\boxed{Cx = v^{x+1} * d_{x} \quad \text{donde} \quad v^{x+1} = (1+i)^{-(x+1)}}$ y $\boxed{M_{x} = C_{x} + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots\ldots + C_{w}}$

Entonces, una tabla de Conmutación tiene la siguiente disposición:

TABLA DE CONMUTACION
en $us. al 2,5%

Edad x	Dx	Nx	Cx	Mx
1	975.610	30.351.128	5.629.26	235.338,3
2	946.322	29.375.518	.3.917.67	229.846,4
….	…	…	…	…
98	40,37	51.22	29.26	39.12
99	10,84	10,84	10.84	10,58

Las tablas también contienen los símbolos de conmutación: Dx, Nx, Sx, Cx, Mx, R_x . Dichos símbolos son unas relaciones o notación matemática que facilitan enormemente la aplicación práctica de los cálculos de primas, reservas y demás elementos correspondientes a las operaciones de seguros.
Así pues de las tablas demográficas y biométricas, y para determinados colectivos, pueden obtenerse las probabilidades de eliminación de diversas situaciones entre dos edades consecutivas, expresadas en años enteros, estas probabilidades pueden discriminarse por sexos

4. RENTAS VITALICIAS

Las anualidades que se pagan a una persona durante su vida, reciben el nombre de RENTAS VITALICIAS

Una anualidad o renta vitalicia, consiste en una serie de pagos iguales cuyo término queda fijado por la duración de la vida de la persona que ha de recibir la renta. Es decir son anualidades contingentes y como anualidades pueden ser simples o generales, vencidas o adelantadas, inmediatas o diferidas, etc.

Es la cantidad de dinero que cada mes las aseguradoras de pensiones van a pagar a un trabajador, cuando el Servicio Nacional del Sistema de Reparto (SENASIR) haya dictaminado un estado de incapacidad.

Se denominan "rentas vitalicias", porque se trata de una "pensión" que se entregará de por vida. Es decir, hasta que el pensionado o los beneficiarios fallezcan.

Las más frecuentes son las simples vencidas. Son anualidades que se pagan al final de cada periodo.

4.1 RENTA VITALICIA ORDINARIA

En una anualidad vitalicia ordinaria, los pagos se hacen a una persona de edad x. El primer pago a la edad x+1, el segundo a la edad x+2, y así sucesivamente hasta la muerte del beneficiario.

Considerando cada pago independientemente, la renta vitalicia es una serie de dotales puros, pagaderos al final de 1, 2, 3,…., años. Terminando con la muerte del beneficiario. El valor actual de la suma de estos dotales es la PRIMA NETA UNICA.

Un seguro dotal puro está dado por:

$$_{n}E_{x} = (l_{x+n} / l_x)^* v^n$$

$a_x =$ Valor actual de una anualidad vitalicia ordinaria para la unidad de capital, pagadera a una persona de edad x.

$$a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \ldots\ldots + {}_wE_x$$

Sustituyendo el valor $_{n}E_{x}$ por su valor en función de lx, se tiene:

$$a_x = \frac{l_{x+1} * V^{x+1} + l_{x+2} * V^{x+2} + l_{x+3} * V^{x+3} + l_{x+4} * V^{x+4} \ldots \text{hasta } w}{l_x * V^x}$$

En función de sus valores de conmutación, tenemos:

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+2} + \ldots\ldots + D_w}{D_x}$$

Por tanto, tenemos:

Ejemplo 3: Calcular el valor de la prima neta única de una renta vitalicia ordinaria de Bs. 12.000 anuales para

Una persona de 55 años, si el costo de oportunidad del dinero es del 2,5% anual.

$$a_{55} = N_{56} / D_{55} = 2.560.828.2 / 193.941$$

$$a_{55} = \text{Bs. } 13.20416$$

El valor de la prima neta única para la unidad de capital es de Bs. 13.20416.

Para el valor actual de la renta vitalicia de Bs. 12.000 se tiene:

$$A = 12.000 \times a_{55} = 12.000 \times 13.20416$$
$$A = \text{Bs. } 158.463.18$$

4.2 RENTA VITALICIA ORDINARIA DIFERIDA

Posiblemente las anualidades de uso más frecuente en nuestro medio, son las anualidades vitalicias ordinarias diferidas.

En las rentas o anualidades diferidas, el primer pago queda aplazado un cierto número de años, y se paga un año después de expirado el periodo de aplazamiento y se continúa los pagos periódicos de la misma manera que una renta vitalicia ordinaria.

La fórmula quedaría expresada como sigue:

$$ {}_{k}a_{x} = \frac{N_{x++k+1}}{D_{x}} $$

Ejemplo 3: Calcular el valor de la prima neta única de una renta vitalicia ordinaria de Bs. 36.000 anuales que debe pagar una persona de 30 años, si el primer pago lo recibirá un año después de cumplir 65 años, si el costo de oportunidad del dinero es del 2,5% anual.

$$ {}_{35}A_{30} = N_{30+35+1} / D_{30} = N_{66} / D_{30} $$

$$ {}_{35}A_{30} = 1.056.041.6 / 440.801 = 2.3957 $$

El valor de la prima neta única para la unidad de capital es de Bs. 2,3957

Para el valor actual de la renta vitalicia de Bs. 36.000 se tiene:

$$ A = 36.000 \text{ x } {}_{35}a_{30} = 36.000 \text{ x } 2,3957 $$

$$ A = \text{Bs. } 86.246,40 $$

5. Dfh
6. Dhg
7. Dgh
8. Dgh
9. Dfh
10. Dfh

SEGUROS DE VIDA

“ El seguro es el conjunto de operaciones que se realizan en el comercio del riesgo, en unos caso, o por el Estado en otros, tendientes a organizar existencias económicas actuales para atender prestaciones y obligaciones creadas por Ley o por el contrato, con relación a hechos posibles o futuros comprendidos en el riesgo" Mario Rivarola –esta definición ya se vislumbra la distinción de prestaciones u obligaciones creadas por contrato refiriéndose a los Seguros Privados, o por obligaciones instituidas por la Ley en cuanto concierne a los Seguros Sociales. (Abelardo Valdez Montero, Estudios Matemáticos Financieros, Editado por el Colegio de Economistas de La Paz Bolivia, 1997).

SEGURO DE VIDA TOTAL

La Póliza de seguro de vida total, mantiene su vigencia durante la vida del asegurado y al final del año de su fallecimiento, la compañía aseguradora paga a los beneficiarios el valor nominal de la póliza.

SEGURO DE VIDA DOTAL

Una póliza de seguro dotal obliga a la compañía a pagar el valor nominal de la póliza, a los beneficiarios si el asegurado muere dentro de un plazo especificado, y al asegurado si este sobrevive al plazo fijado.

SEGURO DE VIDA A TERMINO

Un seguro de vida a término, suministra protección contra el riesgo de muerte durante un cierto número de años. Este tipo de seguro es muy utilizado en las ventas a créditos a mediano y largo plazo. En Bolivia, es el seguro de desgravamen.

PRIMA NETA UNICA Y PRIMA ANUAL DE UN SEGURO DE VIDA TOTAL

Supongamos que lx personas de edad x se proponen pagar ahora, a una compañía de seguro, una suma tal que permita pagar a los herederos de cada una de ellas, la suma de una unidad monetaria, al final del año de su muerte.

Al final del primer año, la compañía tendrá que pagar a los herederos de los dx fallecidos en el año; al final del segundo año, tendrá que pagar a los hereros de los d_{x+1} fallecidos en el segundo año. Y así sucesivamente hasta el final del año en que muera el último grupo de personas.

PRIMA NETA UNICA

El valor actual es igual a la suma de los valores actuales de las cantidades pagadas en los distintos años. Utilizando el símbolo Ax para designar el valor de la prima neta única de un seguro de una unidad monetaria para una persona de edad x; se tiene para las lx personas del grupo $l_x A_x = V d_x + V^2 d_{x+1} + \ldots$. Hasta el límite de la tabla.

$$\boxed{A_x = \frac{V^{x+1} d_x + V^{x+2} d_{x+1} + \ \ldots\ldots \text{ hasta el final de la tabla}}{V^x l_x}}$$

Utilizando los valores conmutativos:

$V^{x+1} d_x = C_x$ y $M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots$.. hasta el límite de la tabla

$$\boxed{A_x = M_x / D_x}$$

Estos seguros de vida total pagados con primas anuales anticipadas reciben el nombre de *SEGUROS ORDINADOS DE VIDA.*

Ejemplo 1: Hallar la prima neta única que tendría que pagar una persona de 30 años de edad para obtener un seguro de vida total por Bs. 50.000 si el costo de oportunidad del dinero es del 2,5% anual.

$50.000A_{30} = 50.000\ M_{30}/D_{30,}$ sustituyendo los valores se tiene:

Prima neta única = 50.000 x 182.403,5/440.801 = 50.000 x 0.4138 = **<u>Bs.20.690, 00</u>**

PRIMA NETA ANUAL O PERIODICA

Utilizaremos el símbolo Px para la prima neta anual de una póliza de seguro ordinario de vida, de una unidad monetaria, para una persona de edad x.

Las primas Px forman una anualidad vitalicia anticipada, formando la ecuación de equivalencia entre los valores actuales, se tiene,

Px äx = Ax

De donde Px = Ax/äx pero, Ax = Mx/Dx y äx = Nx/Dx

o sea

$$\boxed{Px = Mx/Nx}$$

Ejemplo 2: Hallar la prima neta anual que tendría que pagar una persona de 30 años de edad para obtener un seguro de vida total por Bs. 50.000 si el costo de oportunidad del dinero es del 2,5% anual.

$50.000P_{30} = 50.000\ M_{30}/N_{30,}$ sustituyendo los valores se tiene:

Prima neta anual= 50.000 x 182.403,5/10.594.280 = 50.000 x 0,0172 = **<u>Bs. 860.86</u>**

GLOSARIO

INTERES "Precio del dinero"; pago de alquiler sobre el dinero; cargo efectuado al prestatario por el prestamista por el uso del dinero. "El pago en exceso que se efectúa al devolver el dólar prestado se denomina interés". (Mackenzie, M.A., Interés and Bond Values). Se expresa en términos de un porcentaje sobre el principal. Así, por ejemplo, si se paga $6.00 por el uso anual de $100, el tipo es de un 6 por ciento. El interés se paga con frecuencia a intervalos más cortos, pero rara vez a intervalos mayores. El interés sobre los préstamos a la demanda, por ejemplo, generalmente se paga mensualmente; sobre las hipotecas, por semestres y sobre los bonos por semestres.

INTERES SIMPLE El interés simple es aquel que se computa sobre el principal, sin referencia al período de interés, en el supuesto que (para el interés simple exacto) 1/365 del interés de un año se acumule cada día. Equivale a un acuerdo a momento de efectuar el cálculo, y si el período de interés es menor de un año, el tipo de interés simple nominal es mayor que el tipo de interés real acordado anualmente. Sin embargo, en la práctica, esta diferencia no se toma en consideración. El interés simple ordinario se basa en el supuesto de que cada día viene a ser 1/360 de un año. El interés ordinario por un día es algo mayor que el interés exacto por un día. El interés compuesto se calcula sobre el principal más el interés que se haya acumulado, y pagadero en la fecha convenida para el pago del interés. Por lo general, el interés se acuerda mensual, trimestral, semestral o anualmente. (Ver Descuento, Tablas de Interés, Usura).

INTERES ACUMULADO Interés ganado, pero aún no vencido y a pagar. El interés se acumula en todos los pagarés y efectos comerciales.

INVERSION

En sentido general, el empleo de capital con ánimo de lucro, ya sea en un negocio, finca, bienes inmuebles urbanos, bonos del gobierno, bonos industriales, acciones petroleras, mercancías, o en educación. En un sentido más estricto, representa la compra de propiedades por el ingreso que las mismas produzcan, pero siempre con vista a eliminar el riesgo de daño del principal, a diferencia de la Especulación (véase). "El inversionista compra para obtener el ingreso que produce el capital, mientras que el especulador compra para asegurar las utilidades que pueda acumular por un aumento logrado en el valor del capital". (Largerquist: Investment Analysis. Pratt (en Work of Wall Street) expresa que: "Al efectuar una compra, la seguridad es lo fundamental, la cantidad del ingreso es importante, pero secundaria." Un inversionista, a diferencia de un especulador, "contempla poco o ningún riesgo, ingresos por intereses fijos, y poco o ningún propósito de utilidades".

Amortización En términos generales, amortización es cualquier modalidad de pago o extinción de una deuda. Aquí haremos referencia a la más común de estas modalidades. La extinción de una deuda mediante un conjunto de pagos de igual valor en intervalos regulares de tiempo. En otras palabras, este método de extinguir una deuda tiene la misma naturaleza financiera que las anualidades. Los problemas de amortización de deudas representan la aplicación práctica del concepto de anualidad.

Tabla de amortización La tabla de amortización es un despliegue completo de los pagos que deben hacerse hasta la extinción de la deuda. Una vez que conocemos todos los datos del problema de amortización (saldo de la deuda, valor del pago regular, tasa de interés y número de periodos), construimos la tabla con el saldo inicial de la deuda, desglosamos el pago regular en intereses y pago del principal, deducimos este último del saldo de la deuda en el período anterior, repitiéndose esta mecánica hasta el último período de pago. Si los cálculos son correctos, veremos que al principio el pago corresponde en mayor medida a intereses, mientras que al final el grueso del pago regular es aplicable a la disminución del principal. En el último período, el principal de la deuda deber ser cero.

CAPITAL *Este término tiene cuatro significados: En el sentido económico equivale a los bienes de capital, es decir, al conjunto de bienes de producción cantidad física más bien que valor monetario) acumulados, o riqueza representada por el excedente de la producción sobre el consumo. En otras palabras, es una abreviatura de los bienes de capital o valor de capital, especialmente aquella porción de los recursos que se ha separado con el fin de asegurar la continuidad de las actividades productivas.* Los economistas hacen una distinción entre bienes de producción y bienes de consumo. Los primeros son los instrumentos de la producción, o la riqueza intermedia que se emplea en la producción de bienes de consumo o servicios. Por ejemplo, los edificios, fábricas, maquinaria, equipos, ferrocarriles, etc., representan bienes de producción. En cambio, los bienes de consumo comprenden aquellos productos que se destinan para ser utilizados de inmediato, es decir, alimentos, ropa, inventario de mercancías en los anaqueles del detallista, servicios personales, etc. 2 En el sentido contable, el capital es sinónimo de valor neto, y se mide por el exceso de los activos sobre los pasivos. Esto es cierto, prescindiendo de la forma de organización del negocio. En los casos de propiedad única, el capital está representado por la cuenta o cuentas que señalan la responsabilidad del propietario hacia el negocio; en una sociedad, por la suma de las cuentas de los socios; y en una corporación, por la suma de las distintas cuentas de capital, superávit y utilidades no distribuidas. 3 En los negocios, se hace una distinción entre el capital circulante y el capital fijo. El capital circulante también es conocido como activo líquido que en el curso usual del negocio se convierte en dinero, es decir, mercancías, cuentas por cobrar, etc. En cambio, el capital fijo corresponde más o menos al concepto de los economistas en relación con los bienes de producción, y consiste en activos que no se convierten en dinero en el curso usual del negocio, sino que se utilizan para ocuparse del negocio. Está “inmovilizado” o “invertido” en activos fijos, es decir, terrenos, edificios, maquinaria, equipos, etc.

CAPITAL (ACTIVOS FIJOS) Desde el punto de vista de la inversión en un proyecto de nueva inversión son los gastos necesarios para construir la nueva industria o empresa. Comprende el valor de todas las inversiones fijas (invertidas en edificios productivos, maquinarias, equipos, herramientas, etc.) más el gasto de preproducción (o sea, aquellos gastos en que se incurre en el período de prueba de la nueva empresa) y gastos de las facilidades temporales.

CAPITAL DE EXPLOTACION Recursos financieros invertidos o gastos en los que se incurre luego de construida la industria y que garantizan su explotación. Comprende los gastos en servicios, materias primas, transporte, gastos en promoción y distribución, cuenta bancaria, mano de obra, gastos de electricidad, gastos de insumos o piezas de repuestos, etc. El cálculo de este capital se realiza en el primer año de trabajo de la nueva instalación.

CAPITAL DE RIESGO Como fuente de financiamiento de una empresa, conjunto de medios que constituyen el patrimonio neto y que, por lo tanto, están expuestos plenamente al riesgo de gestión. El capital de riesgo se compone de inversiones iniciales y sucesivas de capital (comprendidas las eventuales reservas de sobreprecio de emisión) y del autofinanciamiento generado en el curso de la gestión. El capital de riesgo o capital propio, se contrapone al capital de préstamo. A veces el término se usa en la acepción de venture capital.

CAPITAL PROPIO; CAPITAL NETO Patrimonio neto de una empresa, resultante de la diferencia entre activos y pasivos. En términos monetarios expresa el derecho de propiedad del titular o de los socios y se origina en los aportes iniciales, en los sucesivos aumentos de capital y en las utilidades reinvertidas.

CAPITAL SOCIAL En términos de financiación o inversión para un proyecto de nueva inversión, se le considera al dinero aportado por los socios y sobre el cual pueden pagarse dividendos, (en oposición a la deuda que es dinero que se ha tomado en préstamo para el proyecto, el cual debe reembolsarse y sobre el cual normalmente se cobran intereses), más el financiamiento a largo plazo para la etapa de pre - inversión, más el financiamiento a corto plazo para explotación de la nueva instalación.

DEPOSITO A LA VISTA

Dinero mantenido en cuentas de cheques de bancos comerciales que es parte de la oferta monetaria.

DEPOSITOS

Saldos debidos a los depositantes de un banco; los fondos acreditados a las cuentas de los depositantes. Los depósitos pueden clasificarse de manera amplia en generales, específicos y especiales.

Los depósitos generales se componen de dinero o cheques y créditos bancarios. Siempre que los depósitos sean de esta naturaleza, la relación entre el banco y el depositante es la de deudor y acreedor. El banco se convierte en propietario del depósito. El depositante tiene un crédito contra el banco por el importe depositado. Todos los depósitos se mezclan y no resulta posible distinguirlos. El

banco no está obligado en forma alguna a devolver al depositante el mismo depósito de efectivo toda vez que no es un DEPOSITARIO (véase), como sucede en el caso de los depósitos especiales. Si un banco quebrara, el depositante común se convierte en un acreedor común y tiene parte en los activos en liquidación disponibles proporcionalmente con los restantes acreedores comunes.
Los depósitos específicos son aquellos que se efectúan con un propósito definido y por los cuales el banco actúa en calidad de depositario, como por ejemplo, dinero dejado para cubrir un pagaré, o para adquirir valores.
Los depósitos especiales consisten en propiedades, excluido el dinero, por ejemplo, bonos, acciones, pagarés, pólizas de seguro de vida y otros documentos de valor, joyas, artículos de plata, vajillas, etc., que se entregan al banco, en custodia, y cuya propiedad es del depositante. En este caso la relación entre el banco y el depositante es la de depositario y depositante. Los depósitos especiales nunca pasan a ser activos del banco y en caso de quiebra no son aplicables a la liquidación de sus pasivos sino que deben ser devueltos intactos a los depositantes. Los depósitos especiales se reciben bajo un contrato de depósito, y muchos bancos que no cuentan con bóvedas, se hacen cargo de la custodia de los valores de sus depositantes, dándoles el mismo cuidado que dan a sus propios valores, pero sin asumir responsabilidad adicional. El servicio lo prestan mediante pago o gratuitamente.

DEPOSITOS A LA VISTA
Los depósitos a la vista se definen como aquéllos pagaderos dentro de 30 días. Los depósitos a la vista son aquellos sujetos a extracción mediante cheques y que pueden ser retirados por el depositante, de inmediato, y sin notificación de su intención de extraerlos. (Ver Depósitos).

DEPOSITOS A PLAZO O A TERMINO
Depósitos no sujetos a extracción mediante cheque, y sobre los cuales el banco puede requerir aviso con treinta días de anticipación de la intención de retirar los fondos.
De acuerdo con la definición de la Junta de Gobernadores del Sistema de la Reserva Federa (USA), la expresión "depósitos a término, cuentas abiertas" se entiende que "incluye todas las cuentas no evidenciadas por certificados de depósitos o libretas de ahorro, en relación con las cuales exista un contrato escrito con el depositante, en la fecha en que se efectúa el depósito, en cuanto a que ni el total, ni una parte de dicho depósito puede ser extraído por cheque o de otra forma, excepto en una fecha dada o previa notificación por escrito que debe realizar el depositante con un número determinado de días de antelación, en ningún caso menor de 30 días". (Ver Depósitos).

DEPOSITOS CONJUNTOS
En lenguaje bancario, el término "cuentas conjuntas" (de acuerdo con las leyes estadounidenses) se refiere indiscriminadamente a las cuentas corrientes o de ahorro abiertas a nombre de dos personas, bien como tenedores mancomunados o indistintos. No obstante, el contrato de depósito al igual que el título de la cuenta debe ser específico, puesto que las incidencias legales son diferentes.
En el caso de cuentas mancomunadas, no existe el derecho de supervivencia, por lo que en caso de fallecimiento de uno de los co-depositantes el sobreviviente no tiene derecho sobre el total de saldo de la cuenta. En vez de esto, el sobreviviente comparte la cuenta por igual con los herederos del difunto. Mientras vivan ambos depositantes, los depósitos pueden ser efectuados indistintamente por cualquiera de ellos, pero las extracciones requieren la acción conjunta.
En las cuentas indistintas o solidarias, el sobreviviente de los co-depositantes tiene derecho sobre el total del saldo de la cuenta en caso de muerte de uno de los co-depositantes, por efecto del derecho de sobreviviente. Durante la vida de los co-depositantes cualquiera de ellos puede depositar o extraer libremente.

DEPRECIACION
Término contable que denota la disminución en el valor de un activo debido a (1) deterioro físico o desgaste natural; (2) desuso y (3) repentina declinación en el precio del mercado o del valor comercial. El término también se refiere a un gasto operativo efectuado para la reposición final de un activo a la terminación de su vida útil, o para compensar la disminución de su valor si no ha de reponerse.
Generalmente, la reducción del valor de un activo. Tanto en la contabilidad de las empresas como en la nacional, la depreciación es la estimación en dólares del grado en que se ha "agotado" o gastado el

equipo de capital en un período dado. La depreciación del capital tiene tres causas posibles: 1) Un bien capital se deteriora gradualmente con su uso: 2) el propio tiempo desgasta gradualmente un bien de capital, independientemente de que se utilice o no; 3) las mejoras en la técnica pueden reducir el valor de las existentes al quedar éstas obsoletas. Uso efectivo de recursos productivos durante el proceso de producción. Llamada también consumo de capital.

LECTURAS COMPLEMENTARIAS

LECTURA COMPLEMENTARIA II

15. Amortización

En términos generales, amortización es cualquier modalidad de pago o extinción de una deuda. Aquí haremos referencia a la más común de estas modalidades. La extinción de una deuda mediante un conjunto de pagos de igual valor en intervalos regulares de tiempo. En otras palabras, este método de extinguir una deuda tiene la misma naturaleza financiera que las anualidades. Los problemas de amortización de deudas representan la aplicación práctica del concepto de anualidad.

15.1. Tabla de amortización

La tabla de amortización es un despliegue completo de los pagos que deben hacerse hasta la extinción de la deuda. Una vez que conocemos todos los datos del problema de amortización (saldo de la deuda, valor del pago regular, tasa de interés y número de periodos), construimos la tabla con el saldo inicial de la deuda, desglosamos el pago regular en intereses y pago del principal, deducimos este último del saldo de la deuda en el período anterior, repitiéndose esta mecánica hasta el último período de pago. Si los cálculos son correctos, veremos que al principio el pago corresponde en mayor medida a intereses, mientras que al final el grueso del pago regular es aplicable a la disminución del principal. En el último período, el principal de la deuda deber ser cero.

Estructura general de una tabla de amortización:

SALDO INICIAL	INTERÉS	AMORTIZACIÓN	PAGO	SALDO FINAL

EJERCICIO 30 (Calculando la cuota uniforme)

La mejora de un proceso productivo requiere una inversión de UM 56,000 dentro de dos años. ¿Qué ahorros anuales debe hacerse para recuperar este gasto en siete años, con el primer abono al final del año en curso, si contempla una tasa de interés del 12% anual?

Solución:

VF2 = 56,000; n = 2; i = 0.12; VA = ?;

1º Calculamos el VA de la inversión dentro de 2 años, aplicando indistintamente la fórmula (12) o la función VA:

$$[12] \quad \boldsymbol{VA} = \frac{56{,}000}{(1+0.12)^2} = \text{ UM } 44{,}642.86$$

Sintaxis

VA(tasa;nper;pago;vf;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VF	Tipo	VA
0.12	2		-56,000		44,642.86

2º Luego determinamos la cuota periódica ahorrada a partir de hoy, aplicando la fórmula (19) o la función pago:

VA = 44,642.86; n = 7; i = 0.12; C = ?

$$[19] \quad \boldsymbol{C} = 44{,}642.86 \left(\frac{0.12(1+0.12)^7}{(1+0.12)^7-1}\right) = \text{ UM } 9{,}782.07$$

Sintaxis

PAGO(tasa;nper;va;vf;tipo)

Tasa	Nper	VA	VF	Tipo	PAGO
0.12	7	-44,643			9,782.07

Respuesta:

Los ahorros anuales que deben hacerse son UM 9,782.07

EJERCICIO 31 (Préstamo de Fondo de Asociación de Trabajadores)
Un sector de trabajadores que cotiza para su Asociación tiene un fondo de préstamos de emergencia para los asociados cuyo reglamento establece que los créditos serán al 9% anual y hasta 36 cuotas. La cantidad de los préstamos depende de la cuota.
a) Si el préstamo es de UM 3,000 ¿cuáles serán las cuotas?
b) Si sus cuotas son UM 120 ¿cuál sería el valor del préstamo?

Solución (a)
VA = 3,000; n = 36; i = (0.09/12) = 0.0075; C = ?
Para el cálculo de la cuota aplicamos indistintamente la fórmula (19) o la función PAGO:

$$[19]\quad \boldsymbol{C} = 3{,}000\left(\frac{0.0075(1+0.0075)^{36}}{(1+0.0075)^{36}-1}\right) = \text{UM } 95.3992$$

Sintaxis
PAGO(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

Tasa	Nper	VA	VF	Tipo	PAGO
0.0075	36	-3,000			95.3992

Solución (b)
C = 120; n = 36; i = 0.0075 (0.09/12); VA =?
Para el cálculo de la cuota aplicamos indistintamente la fórmula (18) o la función VA:

$$[18]\quad \boldsymbol{VA} = 120\left(\frac{(1+0.0075)^{36}-1}{0.0075(1+0.0075)^{36}}\right) = \text{UM } 3{,}773.62$$

Sintaxis
VA(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VF	Tipo	VA
0.0075	36	-120			3,773.62

Respuesta:
(a) Las cuotas serán UM 95.40 y (b) Valor del préstamo UM 3,773.62

15.2. Sistema de Amortización Francés
Caracterizado por cuotas de pago constante a lo largo de la vida del préstamo. También asume que el tipo de interés es único durante toda la operación.
El objetivo es analizar no sólo el valor de las cuotas, sino su composición, que varía de un período a otro. Cada cuota está compuesta por una parte de capital y otra de interés. En este sistema, el valor total de la cuota permanece constante y el interés disminuye a medida que decrece el principal. Son útiles las funciones financieras de Excel para el cálculo. El interés aplicado es al rebatir, vale decir sobre los saldos existentes de la deuda en un período. Muy utilizado por los bancos y tiendas que venden al crédito.

EJERCICIO 32 (Calculando la cuota mensual de un préstamo)
Lilian toma un préstamo bancario por UM 3,000 para su liquidación en 6 cuotas mensuales con una tasa de interés del 4.5% mensual. Calcular el valor de cada cuota y elabora la tabla de amortización.

Solución:
VA = 3,000; n = 6; i = 0.045; C = ?

1º Calculamos la cuota a pagar mensualmente:

$$[19]\quad \boldsymbol{C} = 3{,}000\left(\frac{0.045(1+0.045)^{6}}{(1+0.045)^{6}-1}\right) = \textbf{UM 582}$$

2º Elaboramos la TABLA DE AMORTIZACION FRANCES del préstamo:

$$[19] \quad \mathbf{C} = 3{,}000\left(\frac{0.045(1+0.045)^{6}}{(1+0.045)^{6}-1}\right) = \mathbf{UM\ \ 582}$$

2º Elaboramos la TABLA DE AMORTIZACION FRANCES del préstam

	A	B	C	D	E	F
1	**AÑOS**	**SALDO INICIAL**	**INTERÉS**	**AMORTZ**	**PAGO**	**SALDO FINAL**
2	0					**3,000**
3	1	3,000	135	447	581.64	2,553.36
4	2	2,553	115	467	581.64	2,086.63
5	3	2,087	94	488	581.64	1,598.89
6	4	1,599	72	510	581.64	1,089.21
7	5	1,089	49	533	581.64	556.59
8	6	557	25	557	581.64	0

SALDO INICIAL = SALDO FINAL
INTERES = SALDO INICIAL POR TASA DE INTERES
PAGO = FORMULA [19] O BUSCAR OBJETIVO
AMORTIZ. = PAGO - INTERES
SALDO FINAL = SALDO INICIAL - AMORTIZACION

Respuesta:

La cuota mensual a pagar por el préstamo es UM 581.64, contiene la amortización del principal y el interés mensual.

15.3. Sistema de Amortización Alemán

Cada cuota está compuesta por una parte de capital y otra de interés. En este sistema, el valor total de la cuota disminuye con el tiempo, el componente de capital es constante, el interés decrece.

No es posible utilizar las funciones financieras de Excel para su cálculo. Con este método son de mucha utilidad las tablas de amortización.

EJERCICIO 33 (Préstamo con amortización constante)

Una persona toma un préstamo de UM 4,000 para su liquidación en 24 amortizaciones mensuales iguales, con una tasa de interés del 3.85% mensual. Calcular el valor de cada cuota y elabore el cronograma de pagos.

Solución:

VA = 4,000; i = 0.0385; n = 24; C = ?

$$\mathbf{AMORTIZACION} = \frac{4{,}000}{24} = \text{UM}\ \ 166.67$$

Elaboramos el CUADRO DE AMORTIZACION ALEMAN DE LA DEUDA:

	A	B	C	D	E	F
1	AÑOS	SALDO INICIAL	INTERÉS	AMORTZ	PAGO	SALDO FINAL
2	0					4,000.00
3	1	4,000.00	154.00	166.67	320.67	3,833.33
4	2	3,833.33	147.58	166.67	314.25	3,666.67
5	3	3,666.67	141.17	166.67	307.83	3,500.00
6	4	3,500.00	134.75	166.67	301.42	3,333.33
7	5	3,333.33	128.33	166.67	295.00	3,166.67
8	6	3,166.67	121.92	166.67	288.58	3,000.00
9	7	3,000.00	115.50	166.67	282.17	2,833.33
25	23	333.33	12.83	166.67	179.50	166.67
26	24	166.67	6.42	166.67	173.08	0.00

INTERES = SALDO FINAL POR TASA DE INTERES
AMORTIZ. = PRESTAMO / Nº DE CUOTAS
PAGO = INTERES + AMORTIZACION
SALDO FINAL = SALDO INICIAL – AMORTIZACION
Ejercicios Desarrollados
Interés Compuesto, Anualidades,
Tasas de interés, Tasas Equivalentes

EJERCICIO 34 (Fondo de ahorro)
Durante los 5 años de mayores ingresos de su actividad empresarial el dueño de una MYPE, ahorra mensualmente UM 500, colocando el dinero al 8.4% anual en un Banco que capitaliza los intereses mensualmente. El último abono lo efectúa el 1º de enero de 1999. A partir de este momento decide no tocar los ahorros hasta el 1º de enero del 2003. Determinar cuánto es lo ahorrado del 1º de enero de 1994 al 1º de enero de 1999 y cuánto es lo que tiene del 1º de enero de 1999 al 1º de enero del 2003.

Solución:
Del 1/1/1994 al 1/1/1999 el caso es de anualidades y del 1/1/1999 al 1/1/2003 es un caso de interés compuesto.

1) Anualidad: Del 1/1/1994 al 1/1/1999, hay 5 años:
C = 500; i = (0.084/12) = 0.007; n = (5*12) = 60; VF = ?

$$[21]\quad VF = 500\left\langle\frac{(1+0.007)^{60}-1}{0.007}\right\rangle = \text{UM } 37{,}124.02$$

Sintaxis
VF(tasa;nper;pago;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.007	60	-500			37,124.02

2) Interés compuesto:
Del 1/1/1999 al 1/1/2003 hay 4 años. El valor futuro de la cuota periódica es el valor actual para el cálculo del valor futuro al 1/1/2003:

VA = 37,124.02; n = (4*12) = 48; i = 0.007; VF = ?

[11] VF = 37,124.02 (1 + 0.007)48 = UM 51,888.32

Sintaxis

VF(tasa;nper;pago;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.007	48		-37,124.02		51,888.32

Respuesta: Lo ahorrado del 1/1/1994 al 1/1/1999 es UM 37,124.02. Lo acumulado del 1/1/1999 al 1/1/2003 es UM 51,888.32

EJERCICIO 35 (Evaluando el valor actual de un aditamento)
Un fabricante compra un aditamento para un equipo que reduce la producción defectuosa en un 8.5% lo que representa un ahorro de UM 6,000 anuales. Se celebra un contrato para vender toda la producción por seis años consecutivos. Luego de este tiempo el aditamento mejorará la producción defectuosa sólo en un 4.5% durante otros cinco años. Al cabo de éste tiempo el aditamento será totalmente inservible. De requerirse un retorno sobre la inversión del 25% anual, cuánto estaría dispuesto a pagar ahora por el aditamento?

Solución

C = 6,000; n = 6; i = 0.25; VA = ?

1º Actualizamos los beneficios de los seis primeros años:

$$[18] \quad \boldsymbol{VA} = 6,000 \left\langle \frac{(1+0.25)^6 - 1}{0.25(1+0.25)^6} \right\rangle = \text{UM } 17,708.54$$

Sintaxis

VA(tasa;nper;pago;vf;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VF	Tipo	VA
0.25	6	-6,000			17,708.54

2º Calculamos el VA de los beneficios para los próximos 5 años:
Determinamos el monto de la anualidad, aplicando una regla de tres simple:

Si 8.5% es igual a 6,000
4.5% a cuánto será igual **C**

$$\boldsymbol{C} = \frac{4.5\% * 6,000}{8.5\%} = \text{UM } 3,176.47$$

Con este valor actualizamos la anualidad:

C = 3,176.47; i = 0.25; n = 5; VA = ?

$$[18] \quad \boldsymbol{VA} = 3,176.47 \left\langle \frac{(1+0.25)^5 - 1}{0.25(1+0.25)^5} \right\rangle = \text{UM } 8,542.42$$

Sintaxis

VA(tasa;nper;pago;vf;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VF	Tipo	VA
0.25	5	-3,176			8,542.42

3º Finalmente, sumamos los valores actuales obtenidos:

VAT = 17,708.54 + 8,542.42 = UM 26,250.96

Respuesta:
El precio a pagarse hoy por el aditamento con una esperanza de rentabilidad de 25% anual es UM 26,250.96

EJERCICIO 36 (Calculando la tasa vencida)
Determinar la tasa vencida de una tasa de interés anticipada de 12% semestral a:

Solución:
ia = 0.12; iv = ?

$$[29]\quad iv = \frac{0.12}{1-0.12} = 0.1364$$

Respuesta:
La tasa vencida es 13.64% semestral.

EJERCICIO 37 (Calculando la tasa vencida)
Tenemos una tasa de interés anual de 24% liquidada trimestralmente por anticipado. ¿Cuál es el interés trimestral vencido?.

Tasa de interés trimestral anticipada $= 0.24/4 = 0.06$

Tasa de interés trimestral vencida: $[12]\quad iv = \frac{0.06}{1\text{-}0.06} = 0.0638$

Para utilizar éstas conversiones, trabajar con la tasa correspondiente a un período de aplicación. Por ejemplo, una tasa de interés de 12% anticipada y/o vencida para un semestre.
Respuesta:
La tasa vencida es 6.38% trimestral.

EJERCICIO 38 (Calculando el VF)
Calcular el valor final de un capital de UM 50,000 invertido al 11 % anual, con capitalización compuesta durante 8 años.

Solución:
VA = 50,000; i = 0.11; n = 8; VF = ?

Calculamos el VF aplicando la fórmula (11) o la función financiera VF:

VF = 50,000(1 + 0.11)8 = UM 115,226.89

Sintaxis
VF(tasa;nper;pago;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.11	8		-50,000		115,226.89

Respuesta:
El valor final o futuro es UM 115,226.89.

EJERCICIO 39 (Calculando n, VF e I)
Un pequeño empresario deposita UM 1,500 con una tasa del 5% trimestral y capitalización trimestral el 30 de Marzo de 1999. Calcular cuánto tendrá acumulado al 30 de Marzo del 2006. Considerar el interés exacto y comercial.

Solución: Con interés exacto
VA = 1,500; i = 0.05; n = ?; VF = ?; I = ?

1º Calculamos el plazo (n) con la función DIAS.LAB (Un año = 365 días y 4 trimestres):

Sintaxis

DIAS.LAB(fecha_inicial;fecha_final;festivos**)**

Fecha inicial	Fecha final	Festivos	DIAS
1999-03-30	2006-03-30		20.03

DIAS.LAB/4 = 20.03 n = 20.03

2º Calculamos el VF utilizando la fórmula y la función respectiva de Excel:

[11] $\boldsymbol{VF} = 1{,}500(1+0.05)^{20.03} =$ UM 3,985.78

Sintaxis

VF(tasa;nper;pago;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.05	20.03		-1,500		3,985.78

Respuesta:
El monto acumulado después de 20 trimestres es UM 3,985.78

Solución: Con interés comercial
VA = 1,500; i = 0.05; n = ?; VF = ?; I = = ?

1º Calculamos n aplicando la función DIAS.LAB:(Un año = 360 días y 4 trimestres)

Sintaxis

DIAS.LAB(fecha_inicial;fecha_final;festivos**)**

Fecha inicial	Fecha final	Festivos	DIAS
1999-03-30	2006-03-30		20.31

DIAS.LAB / *4 = 20.31 n = 20.31

[11] $\boldsymbol{VF} = 1{,}500(1+0.05)^{20.31} =$ UM 4,040.60

Sintaxis

VF(tasa;nper;pago;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.05	20.31		-1,500		4,040.60

Respuesta:
El monto acumulado después de 20.31 trimestres es UM 4,040.60
Nuevamente, constatamos que el interés comercial es mayor que el interés exacto.

EJERCICIO 40 (Calculando el VF)
Cuál será el monto después de 12 años si ahorramos:
UM 800 hoy, UM 1,700 en tres años y UM 500 en 5 años, con el 11% anual.

Solución
VA1,3 y 5 = 800, 1,700 y 500; n = 12; i = 0.11; VF12 = ?

Aplicando sucesivamente la fórmula [11] y la función VF:

[11] $\boldsymbol{VF} = 800(1.11)^{12} + 1{,}700(1.11)^{9} + 500(1.11)^{7} = \text{UM } 8{,}185.50$

Sintaxis

VF(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.11	12		800.00		2,798.76
0.11	9		1,700.00		4,348.66
0.11	7		500.00		1,038.08
VALOR FUTURO TOTAL					8,185.50

Respuesta:
El monto ahorrado después de 12 años es UM 8,185.50

EJERCICIO 41 (Calculando el VF)
Un líder sindical que negocia un pliego de reclamos, está interesado en saber cuánto valdrá dentro de 3 años el pasaje, considerando que el aumento en el transporte es 1.4% mensual y el pasaje cuesta hoy UM 1.

Solución:
VA = 1; i = 0.014; n = (12*3) = 36; VF = ?

VF = 1(1 + 0.014)36 = UM 1.65

Sintaxis

VF(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.014	36		-1		1.65

Respuesta:
Dentro de tres años el pasaje costará UM 1.65

EJERCICIO 42 (Calculando el monto acumulado)
Jorge ahorra mensualmente UM 160 al 1.8% mensual durante 180 meses. Calcular el monto acumulado al final de este período.

Solución
C = 160; i = 0.018; n = 180; VF = ?

[21] $\boldsymbol{VF} = 160\left(\frac{(1+0.018)^{180}-1}{0.018}\right) = \text{UM } 211{,}630.87$

Sintaxis

VF(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.018	180	-160			211,630.87

Respuesta:
El monto acumulado es UM 211,630.87
EJERCICIO 43 (Calculando el plazo)
Durante cuánto tiempo estuvo invertido un capital de UM 4,800 para que al 12% anual de interés produjera un monto de UM 8,700.

Solución:
VA = 4,800; i = 0.12; VF = 8,700; n = ?

[18] $n = \dfrac{\log\dfrac{8,700}{4,800}}{\log(1+0.12)} = 5.2476$

Sintaxis

NPER(**tasa**; **pago**; **va**; vf; tipo)

Tasa	Pago	VA	VF	Tipo	n
0.12		4,800	-8,700		5.2476

0.2476*12 = 2.9712 meses 0.9712*30 = 29.1360 días

Comprobando tenemos: (11) **VF =** 4,800*1.125.2476 = UM 8,700

Respuesta:
El tiempo en que ha estado invertido el capital fue de 5 años y 2 meses con 29 días.

EJERCICIO 44 (Calculando el monto final de un capital)
Qué monto podríamos acumular en 12 años invirtiendo ahora UM 600 en un fondo de capitalización que paga el 11% los 6 primeros años y el 13% los últimos 6 años.

Solución:
VA = 600; i6 = 0.11 e i6 = 0.13; n = 12; VF = ?

[11] ***VF*** = 600*(1 + 0.11)6*[1 + 0.13)6 = UM 2,336.47

Sintaxis

VF(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.11	6		-600		1,122
0.13	6		-1,122		2,336.47

Como apreciamos en la aplicación de la fórmula los factores de capitalización de cada tramo no los sumamos sino los multiplicamos. Esto es así cuando la tasa es variable durante el período de la inversión y/o obligación.

Respuesta:
El monto acumulado en 12 años es UM 2,236.47

EJERCICIO 45 (Calcular el monto a pagar por una deuda con atraso)
Un empresario toma un préstamo de UM 18,000 a 12 meses, con una tasa mensual de 3.8% pagadero al vencimiento. El contrato estipula que en caso de mora, el deudor debe pagar el 4% mensual sobre el saldo vencido. ¿Calcular el monto a pagar si cancela la deuda a los doce meses y 25 días?

Solución:
VA = 18,000; n1 = 12; n2 = (25/12) = 0.83; i = 0.038; imora = 0.04; VF = ?

1º Con la fórmula (11) o la función VF calculamos el monto a pagar a los doce meses más la mora por 25 días de atraso:

(11) VF = 18,000(1 + 0.038)12 = UM 28,160.53
(11) VF = 28,160.53(1 + 0.038)0.83 = UM 29,049.46 o también en un sólo paso:

(11) **VF** = 18,000*1.03812*1.0380.83 = UM 29,045.88

Sintaxis

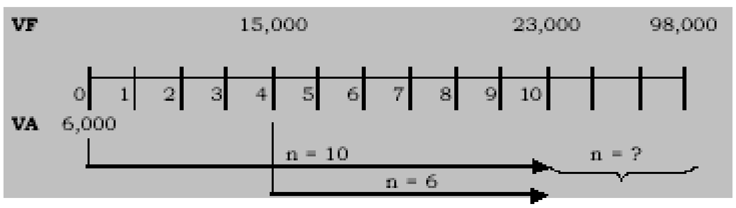
VF(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.038	12		-18,000.00		28,160.53
0.038	0.83		-28,160.53		29,049.46

Respuesta:
La mora es aplicada al saldo no pagado a su vencimiento, en nuestro caso es UM 28,160.53. El monto que paga al final incluido la mora es UM 29,096.09.

EJERCICIO 46 (Calculando el tiempo)
Si depositamos hoy UM 6,000, UM 15,000 dentro de cuatro años y UM 23,000 dentro de seis años a partir del 4to. Año. En qué tiempo tendremos una suma de UM 98,000 si la tasa de interés anual es de 14.5%.

Solución:



1º Capitalizamos los montos abonados hoy (6,000) y a 4 años (15,000) para sumarlos al abono de UM 23,000 dentro de 10 años, aplicando la fórmula (11) ***VF = VA(1 + i)n*** o la función VF:

Sintaxis

VF(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.145	10		-6,000.00		23,238.39
0.145	6		-15,000.00		33,800.58
Depósito el 10º año					23,000.00
AHORROS ACUMULADOS AL 10º AÑO					80,038.98

2º Calculamos el tiempo necesario para que los abonos sean UM 98,000:

$$(14)\quad n = \frac{\log\left(\frac{98{,}000}{80{,}038.98}\right)}{\log(1+0.145)} = 1.4952$$

Sintaxis

NPER(**tasa**; **pago**; **va**; vf; tipo)

Tasa	Pago	VA	VF	Tipo	n
0.145		80,038.98	-98,000.00		1.4952

0.4952*12 = 5.9424 meses 0.9424*30 = 28.2720 días

Tiempo total: 11 años, 6 meses y 28 días

Respuesta:
El tiempo en el que los tres abonos efectuados en diferentes momentos, se convertirán en UM 98,000 es 11 años, 6 meses y 28 días.

EJERCICIO 47 (Ahorro o inversión)

Hace un año y medio una PYME invirtió UM 20,000 en un nuevo proceso de producción y ha obtenido hasta la fecha beneficios por UM 3,200. Determinar a que tasa de interés mensual debería haber colocado este dinero en una entidad financiera para obtener los mismos beneficios.

Solución:

VA = 20,000; n = (12*6) = 18; I = 3,200; VF = ?; i = ?

[16] 3,200 = **VF** - 20,000

VF = 20,000 + 3,200 = UM 23,200

$$[13]\quad \boldsymbol{i} = \left\langle \sqrt[18]{\frac{23,200}{20,000}} - 1 \right\rangle = 0.008280$$

Sintaxis

TASA(**nper**,**pago**;**va**;vf;tipo;estimar)

Nper	Pago	VA	VF	TASA
18		20,000	-23,200	0.008280

Respuesta:

La tasa necesaria es 0.83% mensual.

EJERCICIO 48 (Sumas equivalentes)

Si UM 5,000 son equivalentes a UM 8,800 con una tasa de interés simple anual en tres años; haciendo la misma inversión con una tasa de interés compuesto del 32% anual ¿en cuánto tiempo dará la equivalencia económica?

Solución:

VA = 5,000; VF = 8,800; n = 5; i = ?

1º Calculamos la tasa de interés simple:

$$[4]\quad \boldsymbol{i} = \left\langle \frac{\frac{8,800}{5,000} - 1}{5} \right\rangle = 0.1520 \text{ anual}$$

2º Luego calculamos el tiempo:

$$(14)\quad \boldsymbol{n} = \frac{\log\left\langle \frac{8,800}{5,000} \right\rangle}{\log(1+0.32)} = 2.0362$$

Sintaxis

NPER(**tasa**; **pago**; **va**; vf; tipo)

Tasa	Pago	VA	VF	Tipo	n
0.32		5,000	-8,800		2.0362

0.0362*12*3 = 13 días

Respuesta:

La equivalencia económica se dará en 2 años con 13 días.

EJERCICIO 49 (Calculando el valor de venta de una máquina)

Una máquina que cuesta hoy UM 60,000 puede producir ingresos por UM 3,500 anuales. Determinar su valor de venta dentro de 5 años al 21% anual de interés, que justifique la inversión.

Solución:
VA = 60,000; C = 3,500; n = 5; i = 0.21; VF1 y 2 = ?
Calculamos el VF del VA de la máquina y de los ingresos uniformes:

[11] ***VF*** = 60,000(1+0.21)5 = UM 155,624.5476

[21] $VF = 3{,}500\left(\frac{(1+0.21)^{5}-1}{0.21}\right) =$ UM 26,562.3743

Sintaxis

VF(tasa;nper;pago;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.21	5		-60,000		155,624.5476
0.21	5	-3,500			26,562.3743

Al VF (155,624.5476) del VA de la máquina le restamos el VF (26,562.3743) de los ingresos y obtenemos el valor al que debe venderse la máquina dentro de cinco años: 155,624.5476 - 26,562.3743 = 129,062.17
También solucionamos este caso en forma rápida aplicando en un solo paso la función VF, conforme ilustramos a continuación:

Sintaxis

VF(tasa;nper;pago;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.21	5	3,500	-60,000		129,062.17

Respuesta:
El valor de venta dentro de cinco años es UM 129,062.17.

EJERCICIO 50 (Evaluación de alternativas)
Los directivos de una empresa distribuidora de productos de primera necesidad desean comprar una camioneta que cuesta UM 22,000, están en condiciones de pagar UM 5,000 al contado y el saldo en 18 cuotas mensuales. Una financiera acepta 18 cuotas de UM 1,321 y otra ofrece financiar al 4.5% mensual.
a) ¿Qué interés mensual cobra la primera financiera?
b) ¿Cuáles serían las cuotas en la segunda financiera?
c) ¿Cuál financiación debemos aceptar?

Solución: (a) Primera financiera
VA = (22,000-5,000) = 17,000; n = 18; C = 1,321; i = ?

Sintaxis

TASA(nper;pago;va;vf;tipo;estimar)

Nper	Pago	VA	VF	TASA
18	1,321	-17,000		0.038

(28) $\boldsymbol{TEA} = \left((1+0.038)^{12}-1\right) = 0.5645$

Solución: (b) Segunda Financiera
VA = 17,000; n = 18; i = 0.045; C = ?

$$[19] \quad C = 17,000\left(\frac{0.045(1+0.045)^{18}}{(1+0.045)^{18}-1}\right) = \text{UM} \quad 1,398.03$$

Sintaxis

PAGO(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

Tasa	Nper	VA	VF	Tipo	PAGO
0.045	18	-17,000			1,398.03

Respuestas:
a) El costo efectivo anual es 56.45%
b) El costo efectivo anual es 69.59%
c) Luego conviene la primera financiera por menor cuota y menor costo del dinero.

EJERCICIO 51 (Cuota de ahorro mensual para compra de un carro)
Un empresario desea comprar un automóvil para su uso personal que cuesta hoy UM 20,000. Para tal fin abre una cuenta de ahorros que reconoce una tasa de interés del 1.25% mensual y empieza a hacer depósitos desde hoy. El carro se incrementa en 15% anual ¿cuánto deberá depositar mensualmente para adquirirlo en 5 años?.

Solución:
1º Calculamos el valor del automóvil dentro de 5 años:
VA = 20,000; i = (0.0125*12) = 0.15; n = 5; VF = ?

[11] ***VF*** = 20,000(1 + 0.15]5 = UM 40,227.1437

Sintaxis

VF(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.15	5		-20,000		40,227.14

2º Finalmente, calculamos la cuota mensual:
VF = 40,227.14; i = 0.0125; n = (5*12) = 60; C = ?

$$[22] \quad C = 40,227.1437\left(\frac{0.012}{(1+0.012)^{60}-1}\right) = \text{UM} \quad 461.65$$

Sintaxis

PAGO(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

Tasa	Nper	VA	VF	Tipo	PAGO
0.012	60		-40,227.14		461.65

Respuesta:
Para comprar el automóvil dentro de 5 años al precio de UM 40,227.14; el empresario debe ahorrar mensualmente UM 461.65.

EJERCICIO 52 (Compra de un computador)
Jorge desea comprar un nuevo computador, para lo cual cuenta con UM 500, los cuales entregará como cuota inicial, tomando un préstamo para el resto. El modelo que ha elegido tiene un valor de UM 2,900, pero el esquema de financiación exige que tome un seguro que es 1.70% del valor inicial del equipo, el cual puede pagarse en cuotas mensuales y debe tomarse en el momento de comprarlo. ¿A cuanto ascendería el valor de las cuotas mensuales para pagar el préstamo en 24 meses con una tasa de interés del 3.8% mensual?

Costo del equipo UM 2,900.00

(-) Cuota inicial <u>500.00</u>
Saldo por financiar UM 2,400.00
(+) Seguro por financiar (2,900*1.70%) <u>49.30</u>
Total por financiar UM 2,449.30
VA = 2,449.30; n = 24; i = 0.038; C= ?

Con estos datos calculamos el valor de cada una de las cuotas del total por financiar, aplicando indistintamente la fórmula o la función PAGO de Excel:

$$[19]\quad C = 2{,}449.30\left\langle\frac{0.038(1.038^{24})}{(1+0.038)^{24}-1}\right\rangle = \text{UM } 157.37$$

Sintaxis

PAGO(tasa;nper;va;vf;tipo)

Tasa	Nper	VA	VF	Tipo	PAGO
0.038	24	-2,449.30			157.37

<u>Respuesta</u>:
El valor de cada una de las cuotas mensuales es UM 157.37

EJERCICIO 53 (Calculando la cuota mensual por la compra de un auto)
César compra a plazos un automóvil por UM 15,000 para su pago en 18 cuotas iguales, a una tasa de interés de 3.5% mensual. Calcular el valor de la mensualidad.
<u>Solución</u>:
VA = 15,000; n = 24; i = 0.035; C = ?

$$[19]\quad C = 15{,}000\left\langle\frac{0.035(1+0.035)^{18}}{(1+0.035)^{18}-1}\right\rangle = \text{UM } 1{,}137.25$$

<u>Respuesta</u>:
El valor a pagar cada mes es UM 1,137.25. Aplique usted la función PAGO.

EJERCICIO 54 (Ganaron la Tinka)
Un diario local informa que: «50 personas comparten el premio mayor de la tinka». Cuenta la historia de 50 trabajadores que compraron corporativamente un boleto de lotería y ganaron el premio mayor de UM 5'000,000, al cual era necesario descontar el 12% de impuesto a las ganancias ocasionales. <u>Uno de los afortunados trabajadores coloca sus ganancias a plazo fijo por seis meses al 25% anual con capitalización semestral</u>. Al cabo de este tiempo tiene planeado iniciar su propia empresa y requiere adicionalmente UM 30,000, que los debe cubrir vía un crédito al 3.5% mensual y a 36 meses. Determinar el monto para cada uno, el valor del ahorro a plazo fijo y el monto de las cuotas mensuales.

<u>Solución</u>: (1)
Premio global UM 5'000,000
(-) 12% Impuesto a las apuestas <u>600,000</u>
Saldo para distribución entre 50 ganadores UM 4,400,000
Premio para cada uno (4'400,000/50) UM 88,000.00

<u>Solución</u>: (2)
VA = 88,000; n = 1; i = (0.25/2) = 0.125; VF = ?

[11] **VF** = 88,000[1 + (1*0.125)] = UM 99,000

Sintaxis

VF(tasa;nper;pago;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.125	1		-88,000		99,000

Solución: (3)
VA = 30,000; n = 36; i = 0.035; C = ?

$$[19]\quad \mathbf{C} = 30{,}000\left\langle\frac{0.035\times 1035^{36}}{1035^{36}-1}\right\rangle = \text{ UM } 1{,}478.52$$

Sintaxis

PAGO(tasa;nper;va;vf;tipo)

Tasa	Nper	VA	VF	Tipo	PAGO
0.035	36	-30,000			1,478.52

Respuesta:
1) Monto para cada uno de los ganadores UM 88,000.00
2) Valor del ahorro a plazo fijo UM 99,000.00
3) Cuotas mensuales del crédito UM 1,479.52

EJERCICIO 55 (Compra a crédito de un minicomponente)
Sonia compra un minicomponente al precio de UM 800, a pagar en 5 cuotas al 5% mensual. Calcular la composición de cada cuota y elaborar la tabla de amortización.

Solución:
VA = 800; n = 5; i = 0.05; C = ?

1º Calculamos la cuota mensual:

$$[19]\quad \mathbf{C} = 800\left\langle\frac{0.05(1+0.05)^{5}}{(1+0.05)^{5}-1}\right\rangle = \text{ UM } 184.78$$

Sintaxis

PAGO(tasa;nper;va;vf;tipo)

Tasa	Nper	VA	VF	Tipo	PAGO
0.05	5	-800			184.78

2º Finalmente elaboramos la TABLA DE AMORTIZACION SISTEMA FRANCES:

	A	B	C	D	E	F
1	**AÑOS**	**SALDO INICIAL**	**INTERÉS**	**AMORTZ**	**PAGO**	**SALDO FINAL**
2	0					**800**
3	1	800	40	145	184.7798	655
4	2	655	33	152	184.7798	503
5	3	503	25	160	184.7798	344
6	4	344	17	168	184.7798	176
7	5	176	9	176	184.7798	0
Ver ejercicio 32 página 55, sobre como confeccionar una Tabla de Amortización Francés.						

Respuesta:
La cuota mensual es UM 184.78.

EJERCICIO 56 (Compra de máquinas textiles)
Un pequeño empresario textil adquiere dos máquinas remalladoras y una cortadora por UM 15,000 para su pago en 12 cuotas mensuales uniformes. El primer pago se hará un mes después de efectuada la compra. El empresario considera que a los 5 meses puede pagar, además de la mensualidad, una cantidad de UM 3,290 y para saldar su deuda, le gustaría seguir pagando la misma mensualidad hasta

el final. Este pago adicional, hará que disminuya el número de mensualidades. Calcular en qué fecha calendario terminará de liquidarse la deuda, la compra se llevó a cabo el pasado 1 de Enero del 2003 y la tasa de interés es 4.5% mensual.

Solución:

VA = 15,000; n = 12; i = 0.045; C = ?

1º Calculamos el valor de cada una de las doce cuotas:

$$[19]\quad \boldsymbol{C} = 15{,}000\left\langle\frac{0.045(1+0.045)^{12}}{(1+0.045)^{12}-1}\right\rangle = \text{ UM } 1{,}645.99$$

Sintaxis

PAGO(tasa;nper;va;vf;tipo)

Tasa	Nper	VA	VF	Tipo	PAGO
0.045	12	-15,000			1,644.99

2º Elaboramos la TABLA DE AMORTIZACION DE SISTEMA FRANCES:

Al pagar los UM 3,290 adicionales a la cuota del quinto mes, nos queda un saldo de UM 6,403, como las cuotas mensuales deben ser de UM 1,644.99, calculamos los meses que faltan hasta que la deuda quede saldada:

VA = 6,403; i = 0.045; C = 1,645; n = ?

	A	B	C	D	E	F	G
1	AÑOS	SALDO INICIAL	INTERÉS	AMORTZ	PAGO	SALDO FINAL	VCTO.
2	0					15,000	
3	1	15,000	675	970	1,644.99	14,030	01/01/2003
4	2	14,030	631	1,014	1,644.99	13,016	01/02/2003
5	3	13,016	586	1,059	1,644.99	11,957	01/03/2003
6	4	11,957	538	1,107	1,644.99	10,850	01/04/2003
7	5	10,850	488	4,447	4,934.99	6,403	01/05/2003
8	6	6,403	288	1,357	1,644.99	5,047	01/06/2003
9	7	5,047	227	1,418	1,644.99	3,629	01/07/2003
10	8	3,629	163	1,482	1,644.99	2,147	01/08/2003
11	9	2,147	97	1,548	1,644.99	599	01/09/2003
12	10	599	10	599	608.64	0	12/10/2003
599*(0.045/30)*11 = UM 10.00				1,645 + 3,290 = UM 4,935			
Ver ejercicio 32 pág. 55, Tabla de Amortización Francés.							

$$[20]\quad \boldsymbol{n} = \frac{\log\left\langle 1-\left\langle\frac{6{,}403}{1{,}645}\right\rangle 0.045\right\rangle}{\log\left\langle\frac{1}{(1+0.045)}\right\rangle} = 4.37$$

Sintaxis

NPER(tasa; pago; va; vf; tipo)

Tasa	Pago	VA	VF	Tipo	n
0.045	1,644.99	-6,403.00			4.37

0.37*30 = 11 días

Respuesta:

El pago de la deuda disminuye en casi tres meses, por el abono adicional en el quinto mes, la obligación es liquidada el 12/10/2003, siendo la última cuota de UM 609. La última cuota contiene el saldo final (599) y los intereses de 11 días.

EJERCICIO 57 (Doble préstamo)

Un préstamo de UM 3,000 a ser pagado en 36 cuotas mensuales iguales con una tasa de interés de 3.8% mensual, transcurrido 8 meses existe otro préstamo de UM 2,000 con la misma tasa de interés, el banco acreedor unifica y refinancia el primer y segundo préstamo para ser liquidado en 26 pagos mensuales iguales, realizando el primero 3 meses después de recibir el segundo préstamo. ¿A cuánto ascenderán estas cuotas?

Solución:
VA0 = 3,000; VA8 = 2,000; n = 36; n = 26; i = 0.038; C = ?
1º Calculamos cada una de las 36 cuotas con la fórmula (19) o la función PAGO:

Sintaxis

PAGO(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

Tasa	Nper	VA	VF	Tipo	PAGO
0.038	36	-3,000			154.29

2º En el octavo mes recibimos un préstamo adicional de UM 2,000 que unificado con el saldo pendiente es amortizado mensualmente tres meses después de recibido. Elaboramos la TABLA DE AMORTIZACION DE LA DEUDA.

	A	B	C	D	E	F	
1	AÑOS	SALDO INICIAL	INTERÉS	AMORTZ	PAGO	SALDO FINAL	
2	0					3,000.00	
3	1	3,000.00	114.00	40.29	154.29	2,959.71	
9	7	2,734.10	103.90	50.39	154.29	2,683.70	
10	8	2,683.70	101.98	52.31	154.29	4,631.39	
11	9	4,631.39	175.99	-175.99	0.00	4,807.39	
12	10	4,807.39	182.68	-182.68	0.00	4,990.07	C
13	11	4,990.07	189.62	115.83	305.45	4,874.24	1
14	12	4,874.24	185.22	120.23	305.45	4,754.01	2
38	36	294.27	11.18	294.27	305.45	0.00	26

Ver ejercicio 32 pág. 55, Tabla de Amortización Francés

Al momento 8, después de amortizar el principal, el saldo del préstamo es 2,683.70 - 52.31 = UM 2,631.39 sin embargo, con el nuevo préstamo más los intereses de los períodos de carencia o gracia el saldo es de 2,631.39 + 2,000 + 175.99 + 182.68 = 4,990.07 con el que calculamos el valor de la nueva cuota, aplicando indistintamente la fórmula [19], la función PAGO o la herramienta buscar objetivo de Excel:
VA = 4,990.07; i = 0.038; n = 26

$$[19] \quad \mathbf{C} = 4{,}990.07\left(\frac{0.038(1+0.038)^{26}}{(1+0.038)^{26}-1}\right) = \text{UM } 305.45$$

Sintaxis

PAGO(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

Tasa	Nper	VA	VF	Tipo	PAGO
0.038	26	-4,990.07			305.45

Respuesta:
El valor de cada una de las 26 cuotas es UM 305.45
EJERCICIO 58 (Calculando las cuotas variables de un préstamo)
Tenemos un préstamo de UM 2,500 con una Caja Rural que cobra el 4.5% de interés mensual, para ser pagado en 8 abonos iguales. Luego de amortizarse 3 cuotas negocian con la Caja el pago del saldo restante en dos cuotas, la primera un mes después y la segunda al final del plazo pactado inicialmente. Calcular el valor de estas dos cuotas.

Solución:
VA = 2,500; i = 0.045; n = 8; C = ?

1º Calculamos el valor de cada una de las 8 cuotas, con la función PAGO:

Sintaxis

PAGO(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

Tasa	Nper	VA	VF	Tipo	PAGO
0.045	8	-2,500			379.02

2º Elaboramos la TABLA DE AMORTIZACION DEL PRESTAMO, abonado la tercera cuota el saldo del préstamo es UM 1,663.92. Para el cálculo de la cuota aplicamos Buscar Objetivo de Excel:

	A	B	C	D	E	F
1	MES	SALDO INICIAL	INTERÉS	AMORTZ	PAGO	SALDO FINAL
3	3	1,954.97	87.97	291.05	379.02	1,663.92

Obtenemos el valor de la amortización 4 dividiendo el saldo pendiente entre 2:

$$\text{AMORT.4º CUOTA} = \frac{1{,}663.92}{2} = \text{ UM } 831.96$$

A este valor adicionar los intereses correspondientes, incluido los intereses de los períodos de carencia cuando corresponda.

	A	B	C	D	E	F
1	MES	SALDO INICIAL	INTERÉS	AMORTZ	PAGO	SALDO FINAL
2	0					**2,500.00**
3	1	2,500.00	112.50	266.52	379.02	2,233.48
4	2	2,233.48	100.51	278.51	379.02	1,954.97
5	3	1,954.97	87.97	291.05	379.02	1,663.92
6	4	1,663.92	74.88	831.96	906.84	831.96
7	5	831.96	37.44	0.00	0.00	869.40
8	6	869.40	39.12	0.00	0.00	908.52
9	7	908.52	40.88	0.00	0.00	949.40
10	8	949.40	42.72	949.40	992.13	0.00

Respuesta:
El valor de la cuota 4, es UM 906.84
El valor de la cuota 8, es UM 992.13

EJERCICIO 59 (Préstamo sistema de amortización francés y alemán)
Una persona toma un préstamo por UM 15,000 a reintegrar en 12 cuotas con un interés del 3.5% mensual. Aplicar los sistemas de amortización francés y alemán.

Solución: Sistema Francés
VA = 15,000; n = 12; i = 0.035; C = ?

1º Calculamos el valor de cada una de las cuotas:

$$[19]\quad \boldsymbol{C} = 15{,}000\left(\frac{0.035(1+0.035)^{12}}{(1+0.035)^{12}-1}\right) = \text{ UM } 1{,}552.2692$$

Sintaxis

PAGO(tasa;nper;va;vf;tipo)

Tasa	Nper	VA	VF	Tipo	PAGO
0.035	12	-15,000			1,552.2592

2º Elaboramos la TABLA DE AMORTIZACION DEL PRESTAMO, Sistema Francés:

	A	B	C	D	E	F
1	AÑOS	SALDO INICIAL	INTERÉS	AMORTZ	PAGO	SALDO FINAL
2	0					**15,000.00**
3	1	15,000.00	525.00	1,027.26	1,552.2592	13,972.74
4	2	13,972.74	489.05	1,063.21	1,552.2592	12,909.53
12	10	4,348.87	152.21	1,400.05	1,552.2592	2,948.82
13	11	2,948.82	103.21	1,449.05	1,552.2592	1,499.77
14	12	1,499.77	52.49	1,499.77	1,552.2592	0.00
	Ver ejercicio 32 pág. 55, Tabla de Amortización Francés.					

<u>Solución</u>: Sistema Alemán
VA = 15,000; n = 12; i = 0.035; AMORT. = ?

2º Elaboramos el CUADRO DE AMORTIZACION DE LA DEUDA, Sistema de Amortización Alemán:

	A	B	C	D	E	F
1	AÑOS	SALDO INICIAL	INTERÉS	AMORTZ	PAGO	SALDO FINAL
2	0					**15,000.00**
3	1	15,000.00	525.00	1,250.00	1,775.00	13,750.00
4	2	13,750.00	481.25	1,250.00	1,731.25	12,500.00
12	10	3,750.00	131.25	1,250.00	1,381.25	2,500.00
13	11	2,500.00	87.50	1,250.00	1,337.50	1,250.00
14	12	1,250.00	43.75	1,250.00	1,293.75	0.00
	Ver ejercicio 33 pág. 56, Tabla de Amortización Alemán					

Por falta de espacio hemos ocultado varias filas en cada cuadro.

<u>Comentario</u>:
En el sistema de amortización francés los pagos son constantes y la amortización creciente; en el sistema de amortización alemán los pagos son decrecientes y la amortización es constante.

EJERCICIO 60 (Préstamo con tasa de interés flotante)
Un empresario adquiere un préstamo de la Banca Fondista por UM 5’000,000 a reintegrar en 5 cuotas anuales, con una tasa de interés flotante que al momento del otorgamiento es de 5.50% anual. Pagadas las 3 primeras cuotas, la tasa de interés crece a 7.5% anual, que se mantiene constante hasta el final.

<u>Solución</u>:
VA = 5’000,000; n = 5; i1...3 = 0.055 y i4...5 = 0.075; i = 0.075; AMORT. = ?

1º Calculamos la amortización mensual:

$$\textbf{AMORTIZACION} = \frac{5'000,000}{5} = \text{UM } 1'000,000$$

2º Elaboramos el CUADRO DE AMORTIZACION DE LA DEUDA, Sistema de Amortización Alemán:

	A	B	C	D	E	F
1	**AÑOS**	**SALDO INICIAL**	**INTERÉS**	**AMORTZ**	**PAGO**	**SALDO FINAL**
2	0					**5,000,000**
3	1	5,000,000	275,000	1,000,000	1,275,000	4,000,000
4	2	4,000,000	220,000	1,000,000	1,220,000	3,000,000
5	3	3,000,000	165,000	1,000,000	1,165,000	2,000,000
6	4	2,000,000	150,000	1,000,000	1,150,000	1,000,000
7	5	1,000,000	75,000	1,000,000	1,075,000	0
	Ver ejercicio 59 pág. 110, Tabla de amortización alemán					

Comentario:
Como observamos, el incremento de la tasa de interés produce un quiebre de la tendencia descendente de las cuotas. El quiebre tiene su origen en la cuantía de los intereses.

EJERCICIO 61 (Calculando la tasa efectiva)
Las EDPYMES y Cajas Rurales y Municipales de ahorro y crédito cobran un promedio anual de 52% por préstamos en moneda nacional. Calcular la tasa efectiva.

Solución:
j = 0.52; m = 12; i = ?

$$[26]\quad i_{\text{PERIODICA}} = \frac{0.52}{12} = 0.04333$$

$$[28]\quad i_{\text{TEA}} = \left\langle [1+0.04333]^{12} - 1 \right\rangle = 0.6637$$

Sintaxis

INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)

int_nominal	núm_per_año	INT.EFECTIVO
0.52	12	0.6637

Respuesta:
La tasa efectiva anual que cobran estas instituciones es 66.37%.

EJERCICIO 62 (Calculando la tasa nominal)
Una ONG (como muchas), canaliza recursos financieros de fuentes cooperantes extranjeras para ayuda social. Coloca los recursos que le envían únicamente a mujeres con casa y negocio propios al 3.8% mensual en promedio y hasta un máximo de UM 5,000; además, obligatoriamente los prestamistas deben ahorrar mensualmente el 15% del valor de la cuota que no es devuelto a la liquidación del préstamo, por cuanto los directivos de la ONG dicen que estos ahorros son para cubrir solidariamente el no pago de los morosos. Determinar el costo real de estos créditos, asumiendo un monto de UM 2,000 a ser pagado en 12 cuotas iguales al 3.8% mensual.

Solución:
VA = 2,000; i = 0.038; n = 12; j = ?; TEA = ?; VF = ?

1º Calculamos la tasa nominal y la TEA del préstamo:

$$[25]\quad j = 3.80\%*12 = 45.60\%$$

$$[27]\quad i(\text{TEA}) = [1+0.038]^{12} - 1 = 0.5648$$

Sintaxis

INT.EFECTIVO(**int_nominal**;**núm_per_año**)

int_nominal	núm_per_año	INT.EFECTIVO
0.4560	12	0.5645

2º Calculamos el valor de cada una de las cuotas y el «ahorro»:

$$[19]\quad \boldsymbol{C} = 2{,}000\left\langle\frac{0.038(1+0.038)^{12}}{(1+0.038)^{12}-1}\right\rangle = \text{ UM } 211.64$$

Sintaxis

PAGO(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

Tasa	Nper	VA	VF	Tipo	PAGO
0.038	12	-2,000			210.64

AHORRO MENSUAL OBLIGATORIO= 210.64 * 15% = UM 31.59 mensual

2º Elaboramos la TABLA DE AMORTIZACION DEL PRESTAMO:

	A	B	C	D	E			F
1	**Meses**	**Saldo Inicial**	**Interés**	**Amortz**	**Pago**	**Ahorro**	**Pago Tortal**	**Saldo Final**
2	0							**2,000**
3	1	2,000	76.00	134.64	210.64	31.60	242.23	1,865.36
4	2	1,865	70.88	139.75	210.64	31.60	242.23	1,725.61
5	3	1,726	65.57	145.07	210.64	31.60	242.23	1,580.54
11	9	768	29.19	181.45	210.64	31.60	242.23	586.77
12	10	587	22.30	188.34	210.64	31.60	242.23	398.43
13	11	398	15.14	195.50	210.64	31.60	242.23	202.93
14	12	203	7.71	202.93	210.64	31.60	242.23	0.00
Ver ejercicio 32 pág. 55, Tabla de Amortización Francés								

3º Para determinar el costo efectivo del crédito elaboramos el flujo de efectivo y aplicamos la función TIR:

	A	B	C	D	E
1	**MESES**	**PRESTAMO**	**PAGOS**	**AHORRO**	**FLUJOS NETOS**
2	0	2,000			-2,000.00
3	1		210.64	31.60	242.23
4	2		210.64	31.60	242.23
12	10		210.64	31.60	242.23
13	11		210.64	31.60	242.23
14	12		210.64	31.60	242.23
TIR					**6.28%**

4º Calculamos la tasa nominal y la TEA, a partir de la tasa de interés mensual de 6.28%:

$$[25]\quad \boldsymbol{j} = 6.28\%{*}12 = 75.36\% \text{ nominal}$$

$$[28]\quad \boldsymbol{i}(\text{TEA}) = ([1+0.0628]^{12}-1) = 1.08$$

Sintaxis

INT.EFECTIVO(**int_nominal**;**núm_per_año**)

int_nominal	núm_per_año	INT.EFECTIVO
0.7536	12	1.08

Respuesta:
Considerando el «ahorro» y el valor del dinero en el tiempo, el costo efectivo del crédito que da la ONG es de 108.40% anual, que es lo que pagan sus clientes por su «ayuda social».

EJERCICIO 63 (Evaluando el costo efectivo de un préstamo)
Un pequeño empresario obtiene un crédito de una EDPYME por UM 25,000, a una tasa de interés de 52% anual con capitalización mensual, con una retención mensual del 1.5% para un fondo de riesgo. ¿Cuál será la tasa efectiva anual y el monto a pagar transcurrido un año?
Solución:
1º Como la retención es mensual, convertimos esta tasa periódica a tasa nominal: 0.015*12 = 0.18, luego sumamos este resultado a la tasa nominal:
j = 52% + 18% = 70% capitalizable mensualmente:

VA = 25,000; j = 0.70; m = 12; i = ?

2º Calculamos la tasa periódica y efectiva anual:

$$[26]\ \boldsymbol{i}_{\text{PERIODICA}} = \frac{0.70}{12} = 0.05833$$

$$[28]\ \boldsymbol{i}_{\text{TEA}} = \left\langle [1+0.05833]^{12} - 1 \right\rangle = \ 0.9746$$

Sintaxis
INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)

int_nominal	núm_per_año	INT.EFECTIVO
0.70	12	0.9746

3º Finalmente encontramos el monto, transcurrido un año:
i = (0.9746/12) = 0.0812

[11] ***VF*** = 25,000 (1 + 0.0812)12= UM 63,798.79
Sintaxis
VF(tasa;nper;pago;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.0812	12		-25,000		63,798.79

Respuesta:
La tasa efectiva anual (TEA) es 97.46% y el monto que paga efectivamente transcurrido un año es UM 63,798.79 por un préstamo de UM 25,000.

EJERCICIO 64 (Compra con TARJETA de Crédito)
Una persona con una TARJETA DE CREDITO de una cadena de SUPER MERCADOS, adquiere una refrigeradora el 30/12/03 cuyo precio contado es UM 861.54, para ser pagada en 12 cuotas uniformes de UM 96 mensuales cada una, debiendo agregar a esta cuota portes y seguros por UM 5.99 mensual. El abono de las cuotas es a partir del 5/03/04 (dos meses libres). Gastos adicionales UM 17.43 que hacen un total de UM 878.77. Determinar el costo efectivo y elabore la tabla de amortización de la deuda.

Solución:
VA = 878.77; n = 14; C = 96; i = ?; TEA = ?

1º Con la función TASA calculamos la tasa del período (***i***):

Sintaxis

TASA(**nper**;**pago**;**va**;vf;tipo;estimar)

Nper	Pago	VA	VF	TASA
12	96.00	-878.77		0.04433

2º Con la fórmula [25] calculamos la tasa nominal:

[25] $j = (0.04433*12) = 0.5320$

3º Con la fórmula [28] o la función INT.EFECTIVO calculamos la tasa efectiva anual (TEA) de la deuda:

[28] $i(\text{TEA}) = [1 + 00443257]^{12} - 1 = \ 0.6828$

Sintaxis

INT.EFECTIVO(**int_nominal**;**núm_per_año**)

int_nominal	núm_per_año	INT.EFECTIVO
0.5319	12	0.6828

4º Elaboramos la TABLA DE AMORTIZACION DE LA DEUDA:

	A	B		C	D		E	F
1	MESES	SALDO INICIAL	PORT SEG	INTERÉS 4.43257%	AMORTZ	PAGO	PAGO TOTAL	SALDO FINAL
2	0							**878.77**
3	1	878.77	5.99	38.95	57.05	96.00	101.99	821.72
4	2	821.72	5.99	36.42	59.58	96.00	101.99	762.15
12	10	264.24	5.99	11.71	84.29	96.00	101.99	179.95
13	11	179.95	5.99	7.98	88.02	96.00	101.99	91.93
14	12	91.93	5.99	4.07	91.93	96.00	101.99	0.00

5º Para la determinación del costo efectivo de la deuda elaboramos el respectivo flujo de caja:

MESES	PRESTAMO	PAGOS	PORTES SEGURO	FLUJOS NETOS
0	878.77			-878.77
1		96.00	5.99	101.99
2		96.00	5.99	101.99
3		96.00	5.99	101.99
4		96.00	5.99	101.99
5		96.00	5.99	101.99
6		96.00	5.99	101.99
7		96.00	5.99	101.99
8		96.00	5.99	101.99
9		96.00	5.99	101.99
10		96.00	5.99	101.99
11		96.00	5.99	101.99
12		96.00	5.99	101.99
TIR				**5.50%**

Costo mensual	**5.50%**
TASA NOMINAL	**66.06%**
TEA	**90.22%**

La cuota mensual que efectivamente paga el cliente es UM 101.99

Respuesta:

El costo efectivo de la deuda incluido los UM 5.99 de portes y seguro es de 90.22% al año y 5.50% mensual.

EJERCICIO 65 (Valor actual de los ingresos anuales)

Una compañía frutera plantó naranjas cuya primera producción estima en 5 años. Los ingresos anuales por la venta de la producción están calculados en UM 500,000 durante 20 años. Determinar el valor actual considerando una tasa de descuento de 10% anual.

Solución:
C = 500,000; i = 0.10; n = 20; VA = ?

1º Calculamos el valor actual de los 20 ingresos:

$$[18]\quad \boldsymbol{VA} = 500{,}000\left\langle \frac{(1+0.10)^{20}-1}{0.10(1+0.10)^{20}} \right\rangle = \text{ UM } 4'256{,}781.86$$

Sintaxis

VA(tasa;nper;pago;vf;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VF	Tipo	VA
0.10	20	-500,000			4,256,781.86

2º Finalmente calculamos el valor actual del total 5 años antes de iniciarse la cosecha:

VF = 4’256,781.86; i = 0.10; n = 5; VA = ?

$$(12)\quad \text{VA} = \frac{4{,}256{,}781.86}{1.10^5} = \text{UM }\ 2'643{,}126.62$$

Sintaxis

VA(tasa;nper;pago;vf;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VF	Tipo	VA
0.10	5		-4,256,781.86		2,643,126.62

Respuesta:
El valor actual de los 20 ingresos al día de hoy es UM 2’643,126.62

EJERCICIO 66 (Cuando una inversión se duplica)
Determinar la conveniencia o no de un negocio de compra y venta de relojes, que garantiza duplicar el capital invertido cada 12 meses, o depositar en una libreta de ahorros que paga el 5% anual.

Solución:
VA = 1; VF = 2; n = 12; i = ?

1º Calculamos la tasa de interés de la operación financiera, cuando el capital se duplica:

$$[13]\quad \boldsymbol{i} = \left(\sqrt[12]{\frac{2}{1}}-1\right) = 0.0595$$

Sintaxis

TASA(nper;pago;va;vf;tipo;estimar)

Nper	Pago	VA	VF	TASA
12		-1	2	0.0595

Comprobando tenemos:

$$[11]\quad \boldsymbol{VF} = 1(1+0.0595)^{12} = 2 \text{, se duplica}$$

2º Calculamos el valor futuro de los ahorros a la tasa del 5% anual:

VA = 1; i = 0.05; n = 12; VF = ?

[11] $\boldsymbol{VF} = 1(1+0.05)^{10} = 1.80$, no se duplica

Sintaxis

VF(tasa;nper;pago;va;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VA	Tipo	VF
0.0595	12		-1		2.00
0.05	12		-1		1.80

Respuesta:
Es más conveniente la inversión en el negocio de los relojes.

EJERCICIO 67 (Calculando el valor de contado de un terreno)
Calcular el valor de contado de una propiedad vendida en las siguientes condiciones: UM 20,000 de contado; UM 1,000 por mensualidades vencidas durante 2 años y 6 meses y un último pago de UM 2,500 un mes después de pagada la última mensualidad. Para el cálculo, utilizar el 9% con capitalización mensual.

Solución: (i =0.09/12), (n = 2*12+6)
VA1 = 20,000; C1...30 = 1,000; VF31 = 2,500; i = 0.0075; n = 30; VA = ?

1º Calculamos el VA de la serie de pagos de UM 1,000 durante 30 meses:

[18] $\boldsymbol{VA} = 1{,}000\left(\frac{(1+0.0.075)^{30}-1}{0.0075(1+0.0075)^{30}}\right) = \text{UM } 26{,}775.08$

Sintaxis

VA(tasa;nper;pago;vf;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VF	Tipo	VA
0.0075	30	-1,000			26,775.08

2º Calculamos el VA de los UM 2,500 pagados un mes después de la última cuota:

[12] $\boldsymbol{VA} = \frac{2{,}500}{(1+0.0075)^{31}} = \text{UM } 1{,}983.09$

Respuesta:
Luego el valor de contado del terreno es: 26,775 + 1,983 + 20.000 = 48,758

EJERCICIO 68 (La mejor oferta)
Una persona recibe tres ofertas para la compra de su propiedad:
(a) UM 400,000 de contado;
(b) UM 190,000 de contado y UM 50,000 semestrales, durante 2 ½ años
(c) UM 20,000 por trimestre anticipado durante 3 años y un pago de UM 250,000, al finalizar el cuarto año.
¿Qué oferta debe escoger si la tasa de interés es del 8% anual?

Oferta : UM 400,000

Solución:(b)
i = (0.08/2 semestres) = 0.04; n = (2.5*2) = 5 semestres; VA = ?

$$[18]\quad \boldsymbol{VA} = 50{,}000\left\{\frac{(1+0.0.04)^{5}-1}{0.04(1+0.04)^{5}}\right\} = \text{ UM } 222{,}591.12$$

Sintaxis

VA(tasa;nper;pago;vf;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VF	Tipo	VA
0.04	5	-50,000			222,591.12

Oferta b : 222,591 + 190,000 = UM 412,591

<u>Solución</u> (c):
n = (3*4 trimestres) = 12; i = (0.08/4 trimestres) = 0.02

1º Actualizamos los pagos trimestrales de UM 20,000:

$$[18]\quad \boldsymbol{VA} = 20{,}000\left\{\frac{(1+0.0.02)^{12}-1}{0.02(1+0.02)^{12}}\right\}(1+0.02) = \text{ UM } 215{,}737$$

n = 1 año = 4 trimestres

2º Calculamos el VA del último pago anual de UM 250,000:

Sintaxis

VA(tasa;nper;pago;vf;tipo)

Tasa	Nper	Pago	VF	Tipo	VA
0.08	4		-250,000		183,757.46

Oferta c : 215,737 + 183,757 = UM 399,494

<u>Respuesta</u>:
La oferta (b) es la más conveniente, arroja un mayor valor actual.

EJERCICIO 69 (Generando fondos para sustitución de equipos)
¿Qué suma debe depositarse anualmente, en un fondo que abona el 6% para proveer la sustitución de los equipos de una compañía cuyo costo es de UM 200,000 y con una vida útil de 5 años, si el valor de salvamento se estima en el 10% del costo?

<u>Solución</u>:
Valor de salvamento : 200,000 x 10% = 20,000

Fondo para sustitución de equipo: 200,000 - 20,000 = 180,000

Finalmente, calculamos el valor de cada depósito anual:
VF = 180,000; i = 0.06; n = 5; c = ?

$$[22]\quad \boldsymbol{C} = 180{,}000\left\{\frac{0.06}{1.06^{5}-1}\right\} = 31{,}931.35$$

<u>Respuesta</u>:
El monto necesario a depositar anualmente durante 5 años es UM 31,931.35. Aplique la función PAGO para obtener el mismo resultado.

EJERCICIO 70 (Sobregiros bancarios)
Por lo general casi todos los empresarios recurren al banco para cubrir urgencias de caja vía los sobregiros (ver glosario); los plazos de éstos dependen de las políticas de cada institución financiera, pero es común encontrar en nuestro medio plazos de 48 horas, 3 días como máximo. Estos plazos casi

nunca los cumple el empresario, normalmente los sobregiros son pagados a los 15 ó 30 días. La tasa promedio para este producto financiero es 49% anual más una comisión flat de 4% y gastos de portes de UM 5 por cada sobregiro. Determinar el descuento, el valor líquido, el costo efectivo de un sobregiro de 2 días por UM 10,000, los costos cuando este es pagado con retraso a los 15 y 30 días y la tasa efectiva anual.

Solución:
VN = 10,000; i = 0.49/360 = 0.0014; n = 2; D2 = ?; VA = ?

1º Aplicando la fórmula (10) calculamos el descuento del sobregiro para 2 días:

$$(10)\quad \boldsymbol{D} = \frac{10{,}000 * \left(2 * \left(\frac{0.49}{360}\right)\right)}{1 - \left(2 * \left(\frac{0.49}{360}\right)\right)} = \text{UM } 27.30$$

2º Aplicando la fórmula [8] ***VA = VN - D***, calculamos el VA del sobregiro:

VN = 10,000; D2 = 27.30; iFlat = 0.04; PORTES = 5; VA = ?

(8) **VA**2 = 10,000 - (27.30 + 5) = 9,967.70 - (10,000*0.04) = UM 9,567.70

3º Con la fórmula (4A) calculamos la tasa real de esta operación:

$$[4A]\quad \boldsymbol{i}_7 = \frac{10{,}000 - 9{,}567.70}{9{,}567.70} = 0.0452 \text{ ó } 4.52\% \text{ por los 2 días}$$

Hasta esta parte estamos operando con el descuento bancario a interés simple. El VA obtenido es el valor líquido o el monto que realmente recibe el empresario. Pero debe abonar los UM 10,000 a los 2 días, en caso contrario pagará el interés convencional de 49% anual, 18% anual de interés moratorio sobre el saldo deudor (UM 10,000) y UM 5.00 de portes. A partir de este momento operamos con el interés compuesto.

Sumamos a la tasa de interés los intereses moratorios:
VA = 10,000; n = 15 y 30; i = (0.49/360 + 0.18/360) = 0.0019; VF =?

4º Calculamos el monto a pagar a los 15 y 30 días incluyendo los portes:

(11) ***VF*** = 10,000*(1 + 0.0019)15 + 5 = 10,293.82
(11) ***VF*** = 10,000*(1 + 0.0019)30 + 5 = 10,590.99

Luego aplicando la fórmula (13) y la función TASA, calculamos el costo mensual del sobregiro:

VA = 9,567.70; n = 15 y 30; VF = 10,293.82 y 10,590.99; i = ?

$$[13]\quad \boldsymbol{i} = \sqrt[15]{\frac{10{,}293.82}{9{,}567.70}} - 1 = 0.00489 \text{ por 15 días : } 0.00489*15 = 0.0734$$

$$[13]\quad \boldsymbol{i} = \sqrt[30]{\frac{10{,}590.99}{9{,}567.70}} - 1 = 0.00339 \text{ por 30 días : } 0.00339*30 = 0.1017$$

Sintaxis

TASA(nper;pago;va;vf;tipo;estimar)

Nper	Pago	VA	VF	TASA	
15		9,567.70	-10,293.82	0.00489	DIARIO
30		9,567.70	-10,590.99	0.00339	DIARIO

5º Finalmente, calculamos la tasa nominal y la TEA del sobregiro:

(25) ***j*** = 0.00339*30* = 1.2204
(28) ***TEA*** = (1 + 0.00339)360 - 1 = 2.3816

Respuesta:
1) El descuento para los 2 días es: UM 27.30
2) Los costos cuando el sobregiro es pagado con retraso son:
Para 15 días = 7.34%
Para 30 días = 10.17%
3) La tasa nominal es : j = 122.04%
La tasa efectiva anual es : TEA = 238.16%

EJERCICIO 71 (Evaluando la compra a crédito en un supermercado)
Un ama de casa compra a crédito el 8/10/2004 en un SUPERMERCADO, los siguientes productos:

Una lustradora marcada al contado a UM 310.00
Una aspiradora marcada al contado a UM 276.00
Una aspiradora marcada al contado a UM 115.00 UM 701.00

La señora con la proforma en la mano pide a la cajera que le fraccione el pago en 12 cuotas iguales con pago diferido, la cajera ingresa los datos a la máquina y esta arroja 12 cuotas mensuales de UM 82.90 cada una con vencimiento la primera el día 5/2/2005. Determine la tasa de interés periódica y la TEA que cobra el SUPERMERCADO.

Solución:
VA = 701; C = 82.90; n = 12; i = ?; TEA = ?

1º Aplicando la función TASA calculamos la tasa periódica de la anualidad:

Sintaxis

TASA(nper;pago;va;vf;tipo;estimar)

Nper	Pago	VA	VF	TASA
12	82.90	-701.00		0.05844

Tasa mensual = 5.84%

Tasa nominal:

[25] $\boldsymbol{j} = 0.05844 * 12 = 0.7013$

Tasa Efectiva Anual:

[28] $\boldsymbol{TEA} = [1+0.05844]^{12}-1 = 0.9769$

Respuesta:
El SUPERMERCADO cobra mensualmente por sus ventas al crédito 5.84%, que arroja una tasa nominal de 70.13% y una Tasa Efectiva Anual de 97.69%. Esta tasa no considera portes, seguros e Impuesto a las Transacciones Financieras (ITF).

BIBLIOGRAFIA

1 **Portus Govinden, Lincoyan** Matemáticas Financieras, Editorial Mc Graw Hill, Naucalpan de Juárez, Estado de México, México, c1975.

2 **Cissell Robert y Cissell Helen** Matemáticas Financieras, Editorial Continental S.A., México DF, México, c1978.

3 **Higland, Esther H. y Rosenbaum, Roberta S.** Matemáticas Financieras, Tercera Edición, Editorial Prentice Hall Hispanoamericana, Mexico DF, México, c1985.

4 **García, Jaime A.** Matemáticas Financieras, Cuarta Edición, Editorial Pearson, México, México, c2000.

5 **Moore, Justin H.** Manual de Matemáticas Financieras, Editorial UTEHA, Noriega Editores, México DF, México, c1996.

6 **Valdez Montero, Abelardo** Estudios Matemáticos Financieros y Actuariales, Editorial Colegio de Economistas de La Paz-Bolivia, La Paz, Bolivia, c1996.