INTEGRALES INDEFINIDAS

Una función F(x) se dice que es primitiva de otra función f(x) cuando F'(x) = f(x)
Por ejemplo $F(x) = x^2$ es primitiva de f(x) = 2x
Otra primitiva de f(x) = 2x podría ser $F(x) = x^2 + 5$, o en general , $F(x) = x^2 + C$, donde C es una constante .
Por lo tanto una función f(x) tiene infinitas primitivas. Al conjunto de todas las funciones primitivas se le llama **integral indefinida** y se representa por $\int f(x)\,dx$

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x)}$$

TABLA DE INTEGRALES

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{para } n \neq -1 \qquad \int f(x)^n \bullet f'(x)dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \text{Ln}x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \text{Ln}f(x) + C$$

$$\int \frac{1}{x} \log_a e\, dx = \log_a x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e\, dx = \log_a f(x) + C$$

$$\int a^x \,\text{Ln}a\, dx = a^x + C \qquad \int a^{f(x)} f'(x) \text{Ln}a\, dx = a^{f(x)} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C \qquad \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + C$$

$$\int \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{x} + C \qquad \int \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{f(x)} + C$$

$$\int \text{sen}\, x\, dx = -\cos x + C \qquad \int \text{sen}\, f(x) \bullet f'(x)\, dx = -\cos f(x) + C$$

$$\int \cos x\, dx = \text{sen}\, x + C \qquad \int \cos f(x) \bullet f'(x)\, dx = \text{sen}\, f(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg}\, x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \text{tg}\, f(x) + C$$

$$\int \frac{-1}{\text{sen}^2 x} dx = \text{cotg}\, x + C \qquad \int \frac{-f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)} dx = \text{cotg}\, f(x) + C$$

$$\int \frac{\text{sen}\, x}{\cos^2 x} dx = \sec x + C \qquad \int \frac{\text{sen}\, f(x)}{\cos^2 f(x)} f'(x)dx = \sec f(x) + C$$

$$\int \frac{-\cos x}{\text{sen}^2 x} dx = \text{cosec}\, x + C \qquad \int \frac{-\cos f(x)}{\text{sen}^2 f(x)} f'(x)dx = \text{cosec}\, f(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} f(x) + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + C \qquad \int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = \arccos f(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = \operatorname{arctg} f(x) + C$$

$$\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,cot} gx + C \qquad \int \frac{-f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = \operatorname{arc\,cot} gf(x) + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{f(x)^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} f(x) + C$$

$$\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccos} ecx + C \qquad \int \frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{f(x)^2-1}} = \operatorname{arccos} ecf(x) + C$$

6.3 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

1ª $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Ejemplo : $\int 2x + \cos x\ dx = \int 2x\,dx + \int \cos x\,dx = x^2 + \text{sen } x$

Demostración :

Por la definición $\int f(x)\,dx = F(x) + C \ \Rightarrow \left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x)$

Por otro lado , queremos demostrar que $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ es decir , que si derivamos el segundo miembro nos tiene que salir $f(x) + g(x)$, por lo tanto:

$(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx)' = (\int f(x)\,dx)' + (\int g(x)\,dx)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$ c.q.d.

2ª $\int k \bullet f(x)\,dx = k \bullet \int f(x)\,dx$

Ejemplo : $\int 5 \bullet \frac{1}{x}\,dx = 5 \bullet \int \frac{1}{x}\,dx = 5\cdot \text{Ln}x$

Ejemplo : $\int \text{sen}\,4x\,dx = \int \frac{4 \bullet \text{sen}\,4x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int 4 \bullet \text{sen}\,4x\,dx = \frac{1}{4}(-\cos 4x)$

Demostración :

Queremos demostrar que $(k \bullet \int f(x)\,dx)' = k \bullet f(x) (k \bullet \int f(x)\,dx)' = k \cdot (\int f(x)\,dx)' = k$ $\cdot F'(x) = k \cdot f(x)$ c.q.d.

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

1 MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Sea $\int f(x)\,dx$ donde a su vez $x = g(t)$

Si recordamos que la diferencial $dy = y' \cdot dx \Rightarrow dy(x) = y'(x) \cdot dx$ entonces si $x = g(t) \Rightarrow$ $dx = dg(t) = g'(t)\,dt$
por lo que :

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \bullet g'(t)dt}$$

Se pueden presentar los siguientes casos :
1º Tipo irracional : se resuelve por un cambio de variable que haga desaparecer todas las raíces .

Ejemplo : $\int \frac{1}{x \bullet \sqrt{x-1}}\,dx$

Hacemos la sustitución $x-1 = t^2 \Rightarrow x = 1 + t^2 \Rightarrow 1 \cdot dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{x \bullet \sqrt{x-1}}\,dx = \int \frac{1}{\left(1+t^2\right) \bullet \sqrt{t^2}} \bullet 2t dt = \int \frac{2t}{\left(1+t^2\right)t}\,dt = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2 \operatorname{arctg} t =$$
$$= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + C$$

Ejemplo :

$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}\,dx$ sustitución $x = t^6 \Rightarrow 1 \cdot dx = 6t^5\,dt$

$\Rightarrow t = \sqrt[6]{x}$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t^6} + \sqrt{t^6}}\, 6t^5 dt = \int \frac{6t^5}{t^2 + t^3}\,dt = \int \frac{6t^3}{1+t}\,dt =$$
$$= 6\left[\int t^2 - t + 1 dt + \int \frac{-1}{1+t} dt\right] = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - Ln(1+t)\right) = \text{deshaciendo el cambio} =$$
$$= 6\left(\frac{\sqrt[6]{x}^3}{3} - \frac{\sqrt[6]{x}^2}{2} + \sqrt[6]{x} - Ln(1+\sqrt[6]{x})\right) + C$$

2º Tipo exponencial o logarítmica: sustitución $a^{f(x)} = t$ ó $\log f(x) = t$

Ejemplo :

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \qquad \text{sustitución } e^x = t \Rightarrow x = \text{Ln } t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}dt$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{t}{1+t^2} \bullet \frac{1}{t}dt = \int \frac{1}{1+t^2}dt = \text{arctg}\, t = \text{arctg}\, e^x$$

$$\int \frac{\text{arcsen}\, x}{\sqrt{-x^2+1}}dx = \int \frac{t}{\sqrt{-\text{sen}^2 t+1}}\cos t dt = \int \frac{t\sqrt{1-\text{sen}^2 t}}{\sqrt{1-\text{sen}^2 t}}dt = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\text{arcsen}\, x)^2}{2}$$

METODO DE POR PARTES

Puesto que dy = y' · dx las propiedades de la diferencial deben ser las mismas que las de las derivadas , por ejemplo :

d(u+v) = (u+v)' dx = (u' +v') dx = u' dx + v' dx = du +dv

d(u·v) = (u·v)' dx = (u'v+v'u) dx = u'v dx + v'u dx = vdu + udv

Si nos quedamos con esta última propiedad :

d(u·v) = v·du + u·dv ⇒ u·dv = d(u·v) - v·du ⇒ $\int u \bullet dv = \int d(u \bullet v) - \int v \bullet du$

Puesto que $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x)$ (salvo una constante que se pone al final) entonces :

$$\boxed{\int u \bullet dv = u \bullet v - \int v \bullet du}$$

Ejemplo :

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{2x}dx}_{dv}$$

$u = x \quad \Rightarrow du = dx$

$$dv = e^{2x}dx \Rightarrow \int dv = v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int xe^{2x}dx = x\cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = x\cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

Casos que se suelen resolver

$\int x^n \,\text{sen}\, x dx \qquad \int x^n e^x dx \qquad \int x^n \ln x\, dx \qquad \int e^x \,\text{sen}\, x\, dx$

$\int x^n \,\text{arctg}\, x\, dx \qquad \int \text{arctg}\, x\, dx \qquad \int \text{Ln} x\, dx$ etc.

6.4.3 MÉTODO DE FRACCIONES PARCIALES

I = $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$

Pueden ocurrir tres casos :

1º grado numerador > grado denominador

2º grado numerador = grado denominador
3º grado numerador < grado denominador
Los tres casos se reducen al 3º ya que si recordamos las propiedades del cociente :

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int C(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}}$$

donde la integral de C(x) es inmediata y R(x) es un polinomio de menor grado que Q(x) y por lo tanto estamos en el tercer caso .

Ejemplo :

$$\int \frac{x^3 - 5x^2 + 6x + 2}{x - 1} = \int x^2 - 4x + 2 + \int \frac{4}{x-1} = \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 2x + 4Ln(x-1) + C$$

Para resolver el 3er caso debemos de factorizar el denominador y puede ocurrir :

1º <u>Que el denominador tenga raíces reales simples :</u>

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)\bullet(x-x_2)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} = \frac{A\bullet(x-x_2) + B\bullet(x-x_1)}{(x-x_1)\bullet(x-x_2)}$$

Si igualamos P(x) = $A\bullet(x-x_2) + B\bullet(x-x_1)$ se calcula A y B <u>comparando coeficientes o dándole valores a la x</u>
Al final tendremos :

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int \frac{A}{(x-x_1)} + \int \frac{B}{(x-x_2)} = ALn(x-x_1) + BLn(x-x_2) + C$$

Ejemplo : $\int \frac{-x^2 + 7x + 9}{x^3 + 2x^2 - x - 2}\, dx$

$$\frac{-x^2 + 7x + 9}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{-x^2 + 7x + 9}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+1)(x+2) + C(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)} =$$

$$= \frac{A(x^2 + x + 1) + B(x^2 + 3x + 2) + C(x^2 - 1)}{(x+1)(x-1)(x+2)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (A+3B)x + (A+2B-C)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

Comparando el principio con el final obtenemos :
A + B + C = -1
A + 3B = 7

A + 2B -C = 9

$$\begin{cases} A + B + C = -1 \\ A + 3B = 7 \\ A + 2B - C = 9 \end{cases} \Rightarrow A = 1 \quad B = 2 \quad C = -4$$

Con lo que queda : $\int \frac{-x^2+7x+9}{x^3+2x^2-x-2}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{-4}{x+2}\,dx =$

= Ln(x+1) + 2Ln(x-1) -4Ln(x+2) + C

2º <u>Que el denominador tenga raíces reales múltiples :</u>

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)\bullet(x-x_2)^3} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} + \frac{C}{(x-x_2)^2} + \frac{D}{(x-x_2)^3} =$$

$$= \frac{A\bullet(x-x_2)^3 + B\bullet(x-x_1)(x-x_2)^2 + C\bullet(x-x_1)(x-x_2) + D\bullet(x-x_1)}{(x-x_1)\bullet(x-x_2)^3}$$

Igualando el principio con el final :

$P(x) = A\bullet(x-x_2)^3 + B\bullet(x-x_1)(x-x_2)^2 + C\bullet(x-x_1)(x-x_2) + D\bullet(x-x_1)$

Calculamos los coeficientes A , B , C y D .

Resolvemos la siguiente integral :

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int \frac{A}{(x-x_1)} + \int \frac{B}{(x-x_2)} + \int \frac{C}{(x-x_2)^2} + \int \frac{D}{(x-x_2)^3} =$$

$$= ALn(x-x_1) + BLn(x-x_2) + C\frac{(x-x_2)^{-2+1}}{-2+1} + D\frac{(x-x_2)^{-3+1}}{-3+1} =$$

$$= ALn(x-x_1) + BLn(x-x_2) + C\frac{1}{-(x-x_2)} + D\frac{1}{-2(x-x_2)^2}$$

Ejemplo :

$$\int \frac{3x+12}{(x-2)(x+1)^2} =$$

$$\frac{3x+12}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2)}{(x-2)(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (2A-B+C)x + (A-2B-2C)}{(x-2)(x+1)^2}$$

3x +12 = $(A+B)x^2 + (2A-B+C)x + (A-2B-2C) \Rightarrow$ A = 2 , B=-2 y C=-3

$$\int \frac{3x+12}{(x-2)(x+1)^2} = \int \frac{2}{x-2} + \int \frac{-2}{x+1} + \int \frac{-3}{(x+1)^2} = 2Ln(x-2) - 2Ln(x+1) - 3\,\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C$$

3º <u>Que el denominador tenga raíces reales complejas sencillas :</u>

Si al intentar resolver una ecuación de 2º grado nos sale una raíz negativa se dice que no tiene solución real , pero sí compleja .

El denominador complejo debemos de ponerlo de la forma $(x-a)^2 + b^2$ y resolver la integral de la siguiente forma :

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int \frac{Ax+B}{(x-a)^2 + b^2}$ a partir de aquí nos saldrá como solución un Ln y una arctg .

Ejemplo :

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+4}$$

x^2+2x+4 no tiene raíces reales por lo que igualamos $x^2+2x+4 = (x-a)^2 + b^2 \Rightarrow$
$x^2+2x+4 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \Rightarrow a = -1$, $b = \sqrt{3}$

$\int \frac{x+3}{x^2+2x+4} = \int \frac{Ax+B}{(x+1)^2+3}$ en este caso se ve directamente que A = 1 y B = 3

$$= \int \frac{x}{(x+1)^2+3} + \int \frac{3}{(x+1)^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{(x+1)^2+3} + \int \frac{3}{(x+1)^2+3} =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x+1)^2+3} + \frac{1}{2}\int \frac{-2}{(x+1)^2+3} + \int \frac{3}{(x+1)^2+3} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Ln}(x+1)^3+3\right) + \int \frac{2}{(x+1)^2+3}$$

Esta última integral se resuelve como una arctg :

$$\int \frac{2}{(x+1)^2+3} = \int \frac{\frac{2}{3}}{\frac{(x+1)^2}{3}+\frac{3}{3}} = \int \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}$$

Luego la solución final es $\frac{1}{2}\left(\mathrm{Ln}(x+1)^3+3\right) + \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$

Ejemplo resumen :

$\int \frac{5x^2-4x+6}{(x-2)(x+3)^2(x^2+1)} = \int \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$ donde tendríamos que calcular A, B, C, D , E y después resolver cada una de las integrales .

6.5 INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

3º Tipo trigonométrica :

a) Impar en seno : sustitución cos x = t $\Rightarrow$ x = arc cos t $\Rightarrow$ dx = $\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$ dt

Ejemplo :

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+4\cos^2 x}dx = \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+4t^2} \bullet \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{-1}{1+(2t)^2}dt = \frac{-1}{2}\mathrm{arctg}\,2t =$$

$$= \frac{-1}{2}\mathrm{arctg}\,2\cos x + C$$

b) Impar en coseno : sustitución sen x = t $\Rightarrow$ x = arcsent $\Rightarrow$ dx = $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ dt

Ejemplo :

$$\int \operatorname{sen}^2 x \bullet \cos x\, dx = \int t^2 \bullet \sqrt{1-t^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

c) Par en seno y coseno : sustitución tg x = t $\Rightarrow$ x = arctg t $\Rightarrow$ dx = $\dfrac{1}{1+t^2}$dt

Por si lo necesitamos conviene recordar que cosx = $\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\,x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ y también que

senx = cosx · tgx = $\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

Ejemplo :

$$\int tg^2\,x\;dx = \int \frac{sen^2\,x}{cos^2\,x}dx = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} \bullet \frac{1}{1+t^2}dt \; = \; \int \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int 1dt + \int \frac{-1}{1+t^2}dt =$$

t - arctgt = tgx -arctg(tgx) + C = tgx - x +C

d) Ninguno de los anteriores : sustitución tg $\dfrac{x}{2}$ = t (Este año no la veremos)

4º <u>Tipo inversa trigonométrica:</u> por ejemplo para el arcsen x la sustitución es arcsen x = t $\Rightarrow$ x = sent $\Rightarrow$ dx = cost dt

INTEGRAL DEFINIDA

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

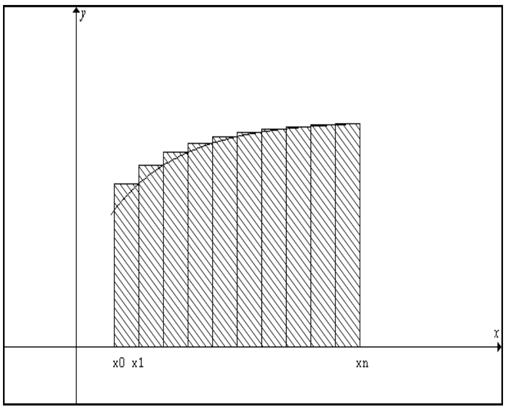
Sea una función continua definida en [a,b] .Supongamos que dividimos este intervalo en n subintervalos : $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$ ...., $[x_{n-2},x_{n-1}]$, $[x_{n-1},b]$

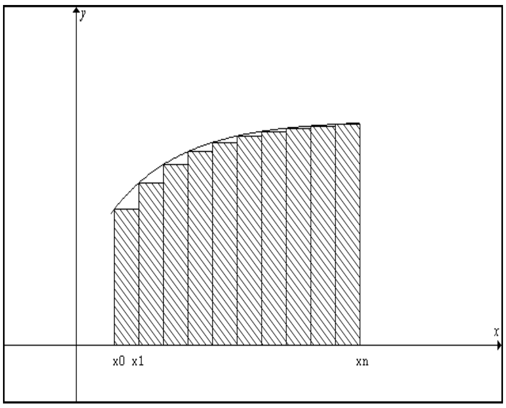
Podríamos calcular la suma de todas las áreas de los rectángulos superiones e inferiores y obtendríamos :

$S_{sup}(f) = M_1(x_1-x_0)+ M_2(x_2-x_1)+ M_3(x_3-x_2)+$.................. $M_n(x_n-x_{n-1})$ siendo M_1 , M_2 , etc los máximos de f en cada uno de los intervalos .

$S_{inf}(f) = m_1(x_1-x_0)+ m_2(x_2-x_1)+ m_3(x_3-x_2)+$.................. $m_n(x_n-x_{n-1})$ siendo m_1 , m_2 , etc los mínimos de f en cada uno de los intervalos .

Lógicamente S_{inf} < Área de f(x) < S_{sup}





Cuando n tiende a infinito es decir , cuando aumenta el número de subintervalos entonces :

$$\lim_{n\to\infty} S_{inf} = \lim_{n\to\infty} S_{sup} = \text{Área de } f(x) = \int_a^b f(x)dx = \text{Integral definida}$$

Si la función está por debajo del eje x la amplitud de los intervalos sigue siendo + pero las M_i y las m_i son - por lo que la suma dará una cantidad negativa y por tanto el área será negativa. En este caso se debe tomar el valor absoluto.
Si una curva cruza el eje x tendrá una parte positiva y otra negativa. Si queremos calcular el área total debemos de calcular los puntos de corte con el eje X y calcular el área de la parte de arriba y la de abajo . El área total será la suma de todas las áreas en valor absoluto .
Propiedades de la integral definida: (interpretación geométrica muy sencilla)

1ª $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

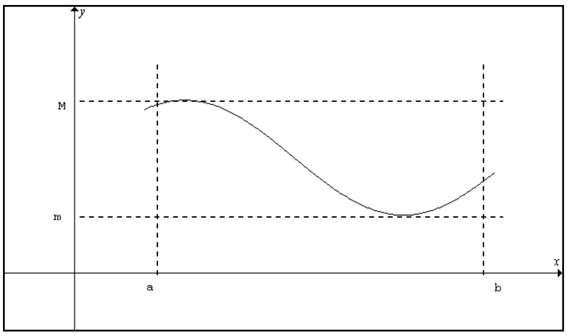
2ª $\int_a^a f(x)dx = 0$

3ª $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Teorema de la media

Si f(x) es continua entonces alcanza un valor máximo M y uno mínimo m en [a,b] luego: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$$

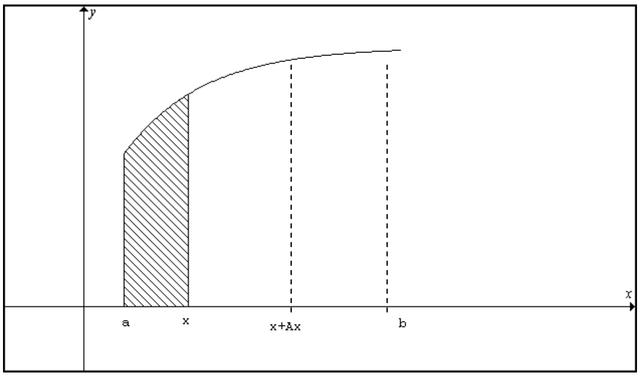


Como la función es continua toma todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo , luego debe de existir un $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ comprendido entre m y M

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$$

Teorema fundamental del cálculo integral (relación entre integral definida e indefinida)

Definimos la siguiente función : S(x) = $\int_a^x f(x)dx$ y por lo tanto S(x+Δx) = $\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx$



$$\Delta S = S(x+\Delta x)-S(x)= \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx = f(c)\Delta x$$

$\dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(c) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c) \quad \Rightarrow$ S'(x)=f(x) pues c tiende a x cuando incremento de x tiende a cero.

Por lo tanto S(x) es una primitiva de f(x).

Regla de Barrow

Sea S(x) y F(x) dos primitivas de f(x) que se diferencian logicamente en una constante.

S(x) = $\int_a^x f(x)dx$ =F(x)+C

Si x=a entonces S(a) = 0 = F(a) +C luego F(a) = -C por lo tanto :

S(x) = $\int_a^x f(x)dx$ =F(x) + C = F(x) -F(a) $\Rightarrow$ $\int_a^x f(x)dx$ =F(x)-F(a)

Si calculamos toda el área encerrada en el intervalo [a,b] :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$