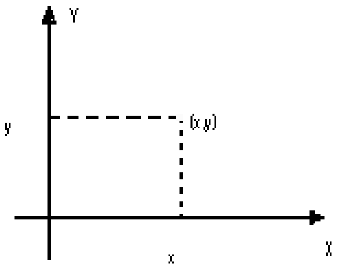
COORDENADAS CURVILINEAS

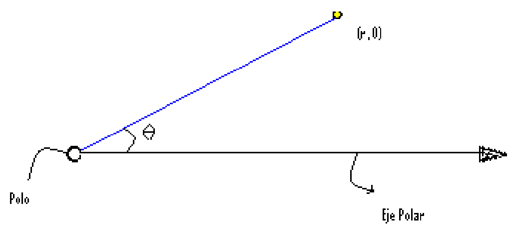
Un sistema de coordenadas es un conjunto de valores que permiten definir unívocamente la posición de cualquier punto de un espacio geométrico respecto de un punto denominado origen. El conjunto de ejes, puntos o planos que confluyen en el origen y a partir de los cuales se calculan las coordenadas de cualquier punto constituyen lo que se denomina sistema de referencia.

5.1 COORDENADAS POLARES

En un sistema de coordenadas rectangulares o cartesiano se puede localizar un punto con una sola pareja de puntos (x,y) estos valores son las distancias dirigidas, partiendo del origen, desde los ejes *x* e *y* respectivamente. El origen es el punto donde se interceptan los dos ejes coordenados.



Otra forma de representar puntos en el plano es empleando coordenadas polares, en este sistema se necesitan un *ángulo* (θ) y una *distancia* (r). Para medir θ, en radianes, necesitamos una semirrecta dirigida llamada eje polar y para medir r, un punto fijo llamado polo.



Para localizar un punto en un sistema polar, se utiliza el par ordenado *(r, θ)*. La coordenada *r* es la distancia entre el origen O y un punto P del plano (siendo *r* un número real). La coordenada θ corresponde al ángulo formado por la rotación del radio vectorial *r* a partir del eje

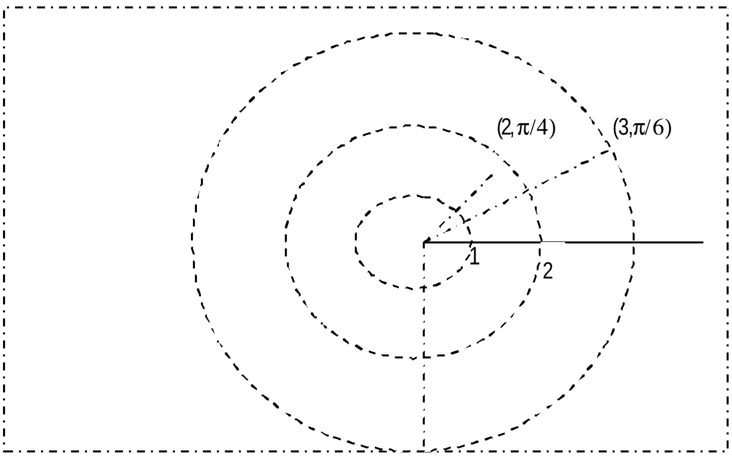
Ing. Carla Escobar Olivares
Lic. Nila Morales

polar tomando como *positivo* el sentido contrario a las manecillas del reloj y puede expresarse en grados o radianes.

Al igual que en las coordenadas rectangulares, las coordenadas polares tienen un sentido positivo y uno negativo. Aunque *r* es una distancia, convencionalmente se acepta que puede ser negativo en cuyo caso se mide en sentido opuesto al radio vectorial.

Si queremos localizar un punto (r,θ) en este sistema de coordenadas, lo primero que tenemos que hacer es trazar una circunferencia de radio r, después trazar una línea con un ángulo de inclinación θ y, por último, localizamos el punto de intersección entre la circunferencia y la recta; este punto será el que queríamos localizar.

A continuación localizamos varios puntos en el plano polar.



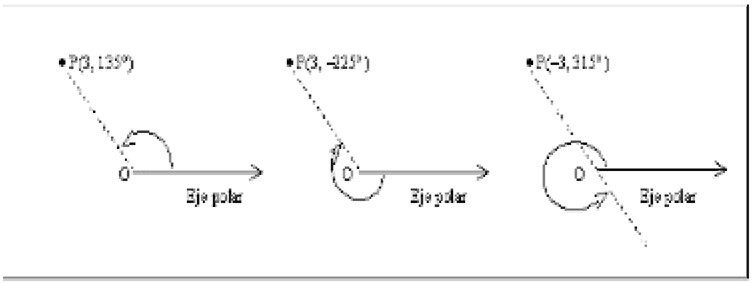
Obsérvese que hay tres circunferencias, todos los puntos sobre estas circunferencias tienen una distancia al polo igual al radio de ella. Lo único que hace falta es encontrar el ángulo de inclinación. Para medir el ángulo es necesario tomar en cuenta si este es positivo o negativo. Si es positivo hay que medirlo en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y si es negativo, a favor del movimiento de las manecillas del reloj.

En las coordenadas polares (a diferencia de las coordenada rectangulares), un mismo punto puede ser ubicado con diversos pares ordenados. Observe el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

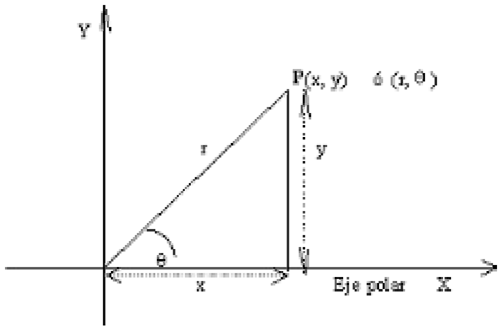
Localice el punto P(3, 135º) y encuentre diferentes pares ordenados que lo representen.

Ing. Carla Escobar Olivares
Lic. Nila Morales



5.1.1 RELACIÓN ENTRE COORDENADAS POLARES Y CARTESIANAS

Si se trazan los dos sistemas de coordenadas de manera superpuesta y se ubica un punto cualquiera P(x, y) ó P(r, θ), se puede observar lo siguiente:



De la figura se concluyen las siguientes relaciones

- $r^2 = x^2 + y^2$ ó $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\tan\theta = \frac{y}{x}$
- $sen\ \theta = \frac{y}{r}$ ó $y = r \operatorname{sen} \theta$
- $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ó $x = r \cos \theta$

En resumen:

Polares a Rectangulares → $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\tan\theta = \frac{y}{x}$

Rectangulares a Polares → $x = r \cos \theta$ $y = r \operatorname{sen} \theta$

Estas relaciones nos permiten cambiar las coordenadas de un punto o la ecuación de un lugar geométrico de un sistema a otro.

Ing. Carla Escobar Olivares
Lic. Nila Morales

Ejemplo 1

Transfórmense las coordenadas del punto $P(4, \frac{p}{4})$ de polares a rectangulares.

De las coordenadas dadas se observa que:

r = 4 y $q = \frac{p}{4}$ *; ó θ = 45º ; de donde* $sen\ q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *y* $\cos q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Lo que se desea conocer es el valor de x y de y; aplicando las fórmulas tenemos:

x = r cos θ ; $x = 4\cos\frac{p}{4}$ *;* $x = 4\frac{\sqrt{2}}{2}$ *; x = 2* $\sqrt{2}$

y = r sen θ; $y = 4\cos\frac{p}{4}$ *;* $y = 4\frac{\sqrt{2}}{2}$ *; y = 2* $\sqrt{2}$

De acuerdo con lo cual las coordenadas del punto P, en un sistema rectangular son P (2 $\sqrt{2}$*, 2* $\sqrt{2}$*)*

Ejemplo 2

Transfórmense las coordenadas del punto P (2,–1) de polares a rectangulares.

De las coordenadas se observa que:

x = 2; y = –1

Se necesita conocer el ángulo, para ello utilizamos la función tangente que relaciona los valores conocidos (x, y)

$\tan q = \frac{1}{2}$; por lo que de la función inversa se obtiene el ángulo:

$q = \tan^{-1}\frac{1}{2}$ 26.56º y sen θ = 0.4472; cos θ = 0.8944

Ya se conoce el ángulo θ, ahora sólo se necesita saber el valor de r.

Aplicando las fórmulas y despejando tenemos:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ = $r = \sqrt{2^2 + (-1)^2}$ = $r = \sqrt{5}$ *; r = 2.236*

De acuerdo con esto, las coordenadas buscadas son:

P (r , θ) : P (*2.236,* 26.56º)

Se puede observar que para obtener r, se pudo haber utilizado también la relación y = r sen θ*, o x = r cos* θ*. Es evidente que la relación no afecta el resultado como se muestra a continuación:*

y = r sen θ *;* $r = \frac{y}{sen\,q}$ *;* $r = \frac{1}{0.4472}$ *; r = 2.236*

El procedimiento utilizado para transformarlas coordenadas de un punto de un sistema a otro nos permite también transformar las ecuaciones de un sistema a otro

Ejemplo 3

Transfórmese la siguiente ecuación del sistema cartesiano a polar. $y^2 = 4x$

Aplicando fórmulas y haciendo la sustitución correspondiente:

$y^2 = 4x$; $(r\ sen\ \theta)^2 = 4(r\cos\theta)$; $r^2\ sen^2\theta = 4\ r\cos\theta$; *simplificando:*

$r\ sen^2\ \theta = 4\cos\theta$; ó $r\ sen^2\ \theta - 4\cos\theta = 0$

5.1.2 GRÁFICAS POLARES

Las reglas y procedimientos generales para tabular y graficar una ecuación polar, son prácticamente los mismos que en un sistema cartesiano, sin embargo lo que se debe tener presente es que el ángulo vectorial θ , es la variable independiente.

Ejemplo 1

Constrúyase la gráfica de la ecuación: $r = 4\cos\theta$

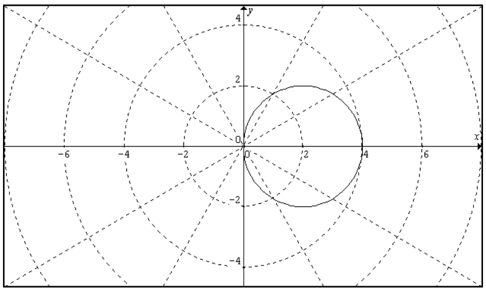
Se elabora una tabla para asignar valores al ángulo θ *y se determinan los valores de r haciendo la sustitución.*

Si $\theta = 30º \rightarrow r = 4\cos 30º \rightarrow r = 4(\frac{\sqrt{3}}{2}) \rightarrow r = 2\sqrt{3} \rightarrow r = 3.46$

De la misma manera se procede con el valor de cada ángulo

Ing. Carla Escobar Olivares
Lic. Nila Morales

θ	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	225º	270º	315º	330º	360º
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
r	4	3.4	2.8	2	0	–2	–2.8	–3.4	–4	–2.8	0	2.8	3.4	4



Ejemplo 2

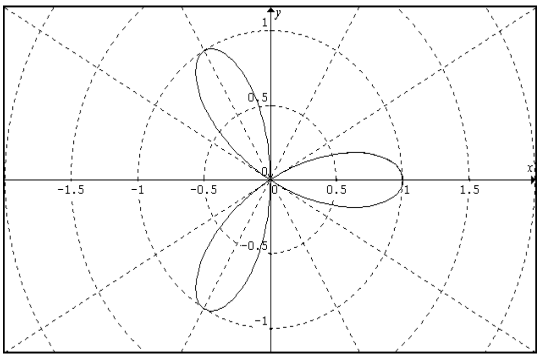
Constrúyase la gráfica de la ecuación: r = cos 3θ

Al asignar valores al ángulo θ se debe tener presente que la ecuación presenta el ángulo multiplicado por 3, esto significa que el estudiante podrá utilizar valores como 10º o 15º, pues al multiplicarse se tendrá el coseno de 30º y 45º respectivamente.

Si θ = 0º→ r = cos 3(0º)→ r = cos 0º → r = 1

Si θ = 10º→ r = cos 3(10º) → r = cos 30º→ $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *= 0.866*

θ	0º	10º	15º	20º	30º	40º	45º	50º	60º	90º	120º	150º	180º
r	1	0.86	0.7	0.5	0	–0.5	–0.7	–0.8	–1	0	1	0	–1



Ing. Carla Escobar Olivares
Lic. Nila Morales

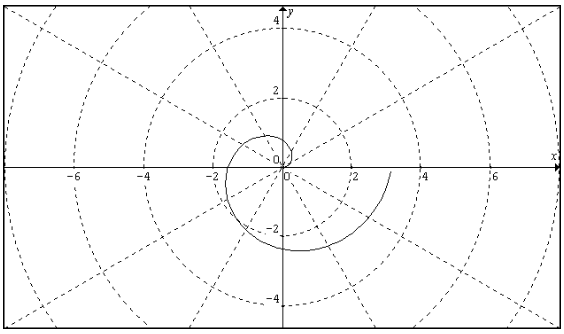
5.1.3 OTRAS CURVAS

Además de las ecuaciones de las cónicas, es necesario conocer algunas de las ecuaciones típicas en coordenadas polares y que resultan muy complicadas para trabajarse en coordenadas rectangulares.

- ESPIRAL DE ARQUÍMEDES. Estas curvas son espirales que se desarrollan a partir del origen y van creciendo de manera ilimitada. La ecuación tiene la forma:

$$r = a\,\theta \quad \text{siendo } a > 0$$

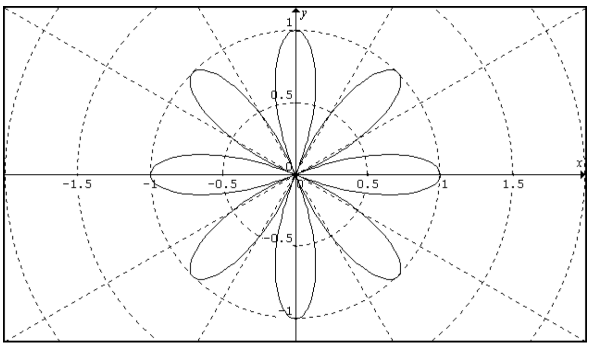
Ejemplo: $r = \theta/2$



- ROSAS. Estas son ecuaciones cuyas gráficas se forman a partir de *petalos* que tiene su centro en el origen. Sus ecuaciones son de la forma

$$r = a \operatorname{sen} n\theta \ \text{ó}\ r = a \cos n\theta$$

Ejemplo: $r = \cos 4\theta$

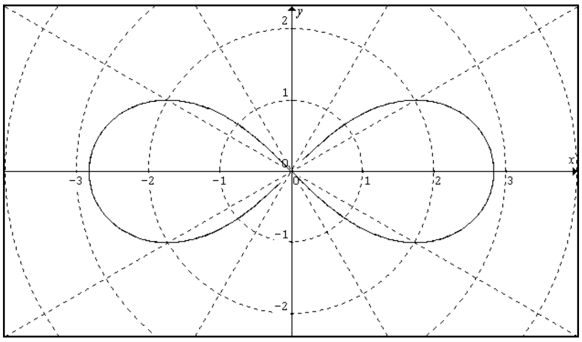


Ing. Carla Escobar Olivares
Lic. Nila Morales

- LEMNISCATAS. Son curvas que tiene forma de aspas de hélice. Algunas de las ecuaciones tiene la forma:

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \qquad r^2 = -a^2 \cos 2\theta$$

$$r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta \qquad r^2 = -a^2 \operatorname{sen} 2\theta$$



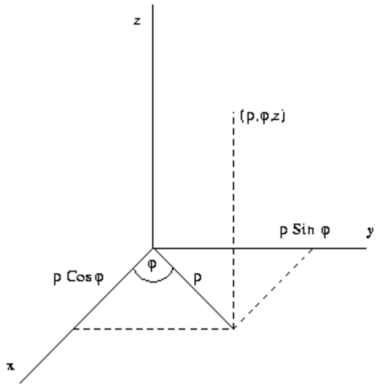
5.2 COORDENADAS CILINDRICAS

Este sistema es muy conveniente en aquellos casos en que se tratan problemas que tienen simetría. Es una versión en 3D de las coordenadas polares de la geometría analítica plana.

Un punto P en coordenadas cilíndricas se representa por (?, Φ,z); donde ? es el radio del cilindro que pasa por P, o sea la distancia radial desde el eje z. Φ es el ángulo azimutal, se mide desde el eje x en el plano xy. z es la coordenada z del sistema.

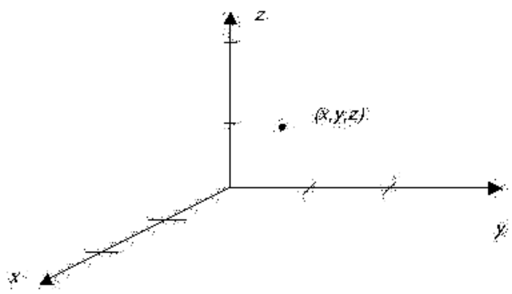
Cada punto debe considerarse como la intersección de las tres superficies perpendiculares entre sí que forman un cilindro circular.

En el sistema de coordenadas cilíndricas, un punto queda determinado por el radio r del cilindro en el que se 'apoya', la altura del punto sobre el plano XY y el ángulo f que se observa en el dibujo.

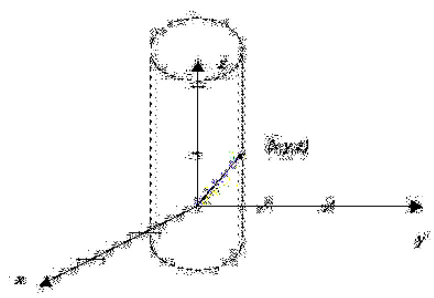


5.2.1 TRANSFORMACION DE COORDENADAS CILINDRICAS A CARTESIANAS

Analizando el punto el punto (x,y,z)



Construyendo un cilindro circular imaginario con eje del cilindro sobre uno de los ejes, que sin perdida de generalidad podría ser el eje z



Sea ρ la distancia del origen al punto *(x,y,z)* y ϕ el ángulo formado entre el eje X y la proyección, *P´,* del punto *P*

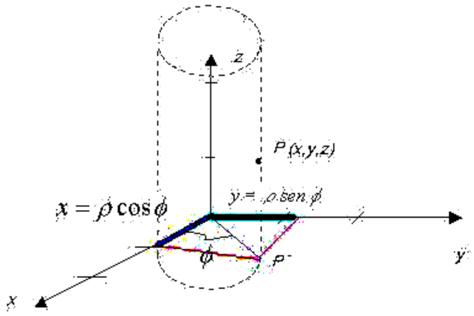
Por lo que se puede definir:

Ing. Carla Escobar Olivares
Lic. Nila Morales

$x = \rho \cos\phi$

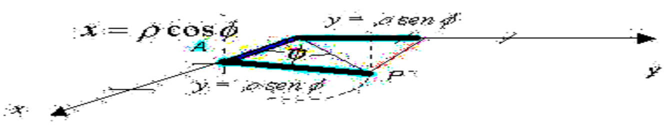
$y = \rho \; sen\phi$

la coordenada *z* al estar asociada con la altura del cilindro no cambia.



Analizando esta figura el plano X-Y en la figura, podemos determinar cuales son los valores de ρ y ϕ

Obsérvese que se forma el triángulo rectángulo entre los puntos *A, P´* y el origen por lo que se ve que ρ es la hipotenusa del triángulo



También se verifica que la hipotenusa del triángulo rectángulo es ρ y que del teorema de Pitágoras se tiene:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y el ángulo puede quedar determinado, si se conoce *x* y *y,* de esa forma:

$$\phi = arc\cos\frac{x}{\rho}$$

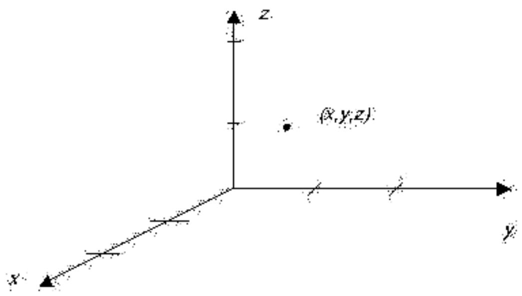
o

$$\phi = arc\ sen\frac{y}{\rho}$$

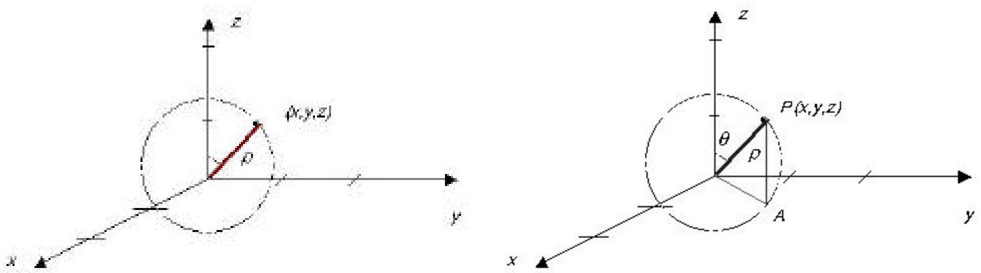
5.3 COOREDENADAS ESFERICAS

En el sistema de coordenadas esféricas, un punto queda determinado por el radio ρ, de la esfera en el que se 'apoya', y los ángulos θ y Φ que se observan en el dibujo.

Analizando el punto el punto (x,y,z)



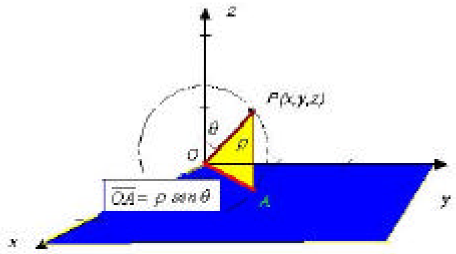
Construyendo una esfera con centro la coordenada (0,0,0) y de radio, ρ, la distancia del origen al punto. Sea también θ el ángulo formado por el eje z y el radio.



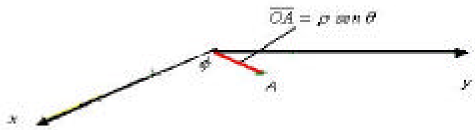
Analizando su proyección podemos, vemos que se forma un triangulo rectángulo con vértices el origen, el punto de proyección *A* y el punto *P,* con hipotenusa el radio ρ:

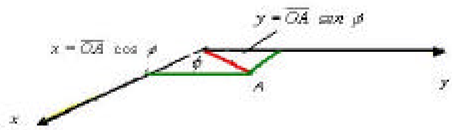
Debido a que el triángulo descrito es un triangulo rectángulo entonces la proyección sobre el plano X-Y es: $\overline{OA} = \rho\ sen\,\theta$

Ing. Carla Escobar Olivares
Lic. Nila Morales



Entonces $\overline{OA}$ será el ángulo entre el eje X y la proyección $\overline{OA}$. Ahora proyectemos $\overline{OA}$ sobre el eje *X* y sobre el eje *Y*, entonces, tendremos:



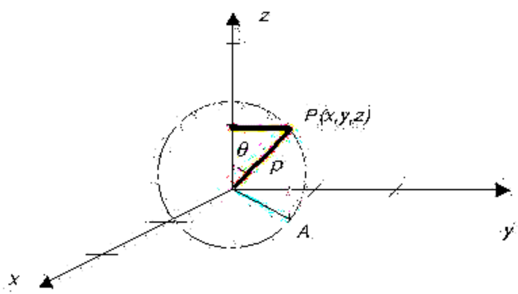


$$x = \overline{OA}\ \cos\phi = \overline{OP}\ sen\ \theta\ \cos\phi = \rho\ sen\ \theta\ \cos\phi$$

$$y = \overline{OA}\ sen\ \phi = \overline{OA}\ sen\ \theta\ sen\ \phi \quad y = \rho\ sen\ \theta\ sen\ \phi$$

Para encontrar cuál es el valor de Z analicemos la proyección de ρ sobre el eje Z, el cual, como vemos del triángulo rectángulo OPZ

$$z = \rho\ \cos\theta$$



Luego entonces las transformaciones quedan expresadas como:

$$x = \rho\ sen\ \theta\ \cos\phi$$
$$y = \rho\ sen\ \theta\ sen\phi$$
$$z = \rho\ \cos\theta$$

5.3.1 TRANSFORMACION DE COORDENADAS ESFERICAS A CARTESIANAS

Se puede fácilmente ver que como luego entonces las transformaciones quedan expresadas como el radio de la esfera solo es la distancia de el origen al punto entonces:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

de z se puede determinar θ como:

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

Una vez que se ha determinado tanto ρ como θ entonces se puede despejar ϕ de *x* o de *y*

$$\phi = arcsen\left(\frac{y}{\rho\ sen\,\theta}\right)$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{x}{\rho\ sen\,\theta}\right)$$

Ing. Carla Escobar Olivares
Lic. Nila Morales