MODELACION EN VARIABLES DE ESTADO

8.1. DEFINICIONES

Estado: El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables de modo que el conocimiento de estas variables en t=t0, junto con el conocimiento de la entrada para t>=t0, determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo t>=t0.

Variables de estado: Las variables de estado de un sistema dinámico son las que forman el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Si se necesitan al menos n variables x1, x2... xn para describir por completo el comportamiento de un sistema dinámico (por lo cual una vez que se proporciona la entrada para t>=t0 y se especifica el estado inicial t=t0 el estado futuro del sistema se determina por completo), tales n variables son un conjunto de variables de estado.

Vector de estado: Si se necesitan n variables de estado para describir por completo el comportamiento de un sistema determinado, estas n variables de estado se consideran los n componentes de un vector x. Tal vector se denomina vector de estado. Por tanto un vector de estado es aquel que determina de manera única el estado del sistema x(t) para cualquier tiempo t>=t0, una vez que se obtiene el estado en t=t0 y se especifica la entrada u(t) para t>=t0.

Espacio de estados: El espacio de n dimensiones cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x1, eje x2..., eje xn se denominan espacio de estados. Cualquier estado puede representarse mediante un punto en el espacio de estados.

8.2. FORMULACIÓN DE LA ECUACIÓN DE ESTADO DE UN SISTEMA

En el análisis en el espacio de estados, nos concentramos en tres tipos de variables en el modelado de sistemas dinámicos:

- Variables de entrada
- Variables de salida
- Variables de estado

Lic. Katya Perez M.
Ing. Carla Escobar O.

Suponemos que un sistema de entradas y salidas múltiples contiene n integradores. También suponemos que existen r entradas y m salidas. Definimos n salidas de los integradores como variables de estado. El sistema se describe mediante:

$$\dot{X}_1(t) = f_1(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t)$$
$$\dot{X}_2(t) = f_2(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{X}_n(t) = f_n(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t)$$

Las salidas del sistema se obtienen mediante

$$Y_1(t) = g_1(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t)$$
$$Y_2(t) = g_2(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t)$$
$$\vdots$$
$$Y_m(t) = g_m(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t)$$

Si definimos

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \qquad g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t) \end{bmatrix} \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

las ecuaciones se convierten en

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t)$$
$$y(t) = g(x, u, t)$$

en donde la primera es la ecuación de estado y la segunda la ecuación de salida.

Si las funciones vectoriales f y g involucran explícitamente el tiempo t, el sistema se denomina sistema variante con el tiempo.

Si se lineal izan las ecuaciones alrededor del estado de operación, tenemos las siguientes ecuaciones de estado y de salida lineal izadas.

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t)$$
$$y(t) = C(t) \cdot x(t) + D(t) \cdot u(t)$$

A(t) matriz de estado

B(t) matriz de entrada

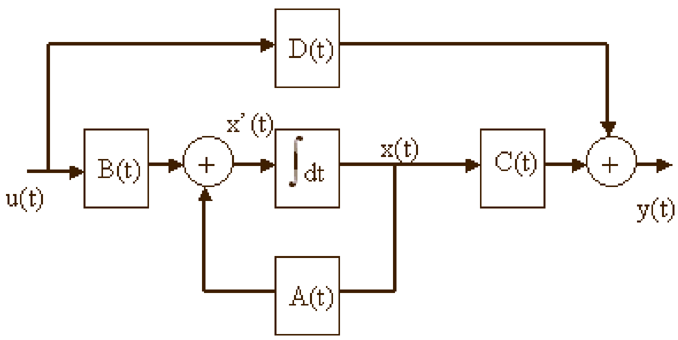
C(t) matriz de salida

D(t) matriz de transmisión directa

Si las funciones vectoriales f y g no involucran el tiempo t explícitamente, el sistema se denomina sistema invariante con el tiempo. En este caso las ecuaciones son:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$
$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

En la figura se representa el diagrama de bloques del sistema de control lineal en tiempo continuo representado en el espacio de estados.



8.3. REPRESENTACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN EL ESPACIO DE ESTADO

En la representación de ecuaciones diferenciales en el espacio de estado destacamos dos casos: contiene y no contiene derivadas de la función excitación.

Lic. Katya Perez M.
Ing. Carla Escobar O.

8.3.1. ECUACIONES DIFERENCIALES EN LAS CUALES NO CONTIENE DERIVADA DE EXCITACIÓN

Representación en el espacio de estados de sistemas de n-ésima orden representados mediante ecuaciones diferenciales lineales en las cuales no contiene derivadas de la función de excitación.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u$$

Definimos:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$\vdots$$

$$x_n = y^{(n-1)}$$

A continuación, la ecuación se escribe como

$$x_2 = \dot{x}_1$$

$$x_3 = \dot{x}_2$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n + u$$

o bien

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

en donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La salida se obtiene mediante

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

o bien

$$y = Cx$$

Lic. Katya Perez M.
Ing. Carla Escobar O.

Vemos que el valor de D es cero

8.3.2. ECUACIONES DIFERENCIALES EN LAS CUALES CONTIENE DERIVADA DE EXCITACIÓN

Representación en el espacio de estados de sistemas de n-ésima orden representadas mediante ecuaciones diferenciales lineales en las cuales contiene derivadas de la función de excitación.

$$y^{n} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

No se puede usar el método directo que utilizamos cuando no contenía derivadas de la función de excitación. Esto se debe a que n ecuaciones diferenciales de primer orden en donde x1= y, pueden no conducir a una solución única.

Una forma de obtener una ecuación de estado y una ecuación de salida es definir las siguientes n variables como un conjunto de n variables de estado:

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u$$

$$\vdots$$

$$x_n = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u$$

Con esta elección de variables de estado está garantizada la existencia de una única solución de la ecuación de estado.

Lic. Katya Perez M.
Ing. Carla Escobar O.

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u$$
$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u$$
$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

o bien

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

En este caso D = ß0 = b0

8.4. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA ASOCIADA AL ESTADO DE UN SISTEMA

En esta sección tratamos la relación entre la función de transferencia y las ecuaciones en el espacio de estado

8.4.1. CORRELACIÓN ENTRE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA Y ECUACIONES EN EL ESPACIO DE ESTADOS

A continuación mostramos como obtener la función de transferencia de un sistema de una sola entrada y una sola salida a partir de las ecuaciones en el espacio de estado.

Consideramos el sistema cuya función de transferencia se obtiene mediante

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

Este sistema se representa en el espacio de estado mediante la ecuaciones siguientes:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$
$$y = C \cdot x + D \cdot u$$

en donde x es el vector de estado, u es la entrada y y es la salida.

La transformación de Laplace de las ecuaciones anteriores se obtienen mediante:

$$t_0 \neq 0$$
$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Dado que la función de transferencia de definió antes como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, cuando las condiciones iniciales son 0, suponemos que x(0) es cero. Por tanto tenemos:

$$t_0 = 0$$
$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$sX(s) - AX(s) = BU(s)$$
$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

Arreglando la ecuación obtenemos

$$X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot BU(s)$$

Sustituyo la ecuación anterior en la de salida

$$Y(s) = \left[C(sI - A)^{-1} \cdot B + D\right] \cdot U(s)$$

Comparando

$$Y(s) = \left[C(sI - A)^{-1} \cdot B + D\right] \cdot U(s) \text{ y } \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

obtenemos

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

Ésta es la expresión de la función de transferencia en términos A,B,C y D.

8.5. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ESTADO

En el estudio de la solución de las ecuaciones de estado encontramos dos casos: homogéneo y no homogéneo, para cada uno de ellos se estudiará sus características aplicando el enfoque de la transformada de Laplace.

8.5.1. SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE ESTADO PARA EL CASO HOMOGÉNEO

Para el caso homogéneo estudiamos de forma teórica sus características principales aplicando un enfoque de la transformada de Laplace para la solución de las ecuaciones de estado.

DESCRIPCIÓN:

Partimos de la ecuación diferencial matricial

Donde x = vector de dimensión n

A = matriz de coeficientes constantes de n*n

$$\dot{x} = Ax$$

Suponemos que la solución está en la forma de una serie de potencias de vectores en t

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots$$

Sustituyendo esta solución supuesta en la ecuación inicial, obtenemos:

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots + kb_k t^{k-1} + \cdots = A(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + kb_k t^k + \cdots)$$

Si la solución supuesta será la verdadera, debe ser válida para toda t. Por tanto, igualando los coeficientes de las potencias iguales de t en ambos miembros de la ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned}
b_1 &= Ab_0 \\
b_2 &= \frac{1}{2}Ab_1 = \frac{1}{2}A^2 b_0 \\
&\vdots \\
b_k &= \frac{1}{k!}A^k b_0
\end{aligned}$$

Sustituyendo t =0 en la ecuación, obtenemos:

$$x(0) = b_0$$

Así, la solución x(t) se escribe como:

$$x(t) = (I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots) \cdot x(0)$$

La expresión en el paréntesis es una matriz de n*n. Debido a su similitud con la serie infinita de potencias para una exponencial escalar, escribimos:

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

8.5.1.1. ENFOQUE DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE ESTADO

Partiendo de la ecuación diferencial escalar homogénea se extiende a la ecuación de estado homogénea:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Tomando la Transformada de Laplace de ambos miembros, obtenemos

$$sX(s) - x(0) = AX(s)$$

$$\text{en donde } X(s) = L[x]$$

$$\text{Por tanto}$$

$$(sI - A)X(s) = x(0)$$

Premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación por

$$(sI - A)^{-1}$$

$$\text{obtenemos}$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0)$$

La transformada inversa de Laplace de X(s) produce la solución x(t)

$$x(t) = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]x(0)$$

observamos que

$$(sI - A)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \cdots$$

Por tanto la Transformada inversa de Laplace produce:

$$L^{-1}\left[(sI - A)\right] = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots = e^{At}$$

La solución de la ecuación se obtiene como

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

8.5.1.2. MATRIZ DE TRANSICIÓN DE ESTADO

Escribimos la solución de la ecuación de estado homogénea $\dot{x} = Ax$

como

$$x(t) = \Phi(t) \cdot x(0)$$

en donde $\Phi(t)$ es una matriz $n \times n$ y es solución única de

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) \quad \Phi(0) = 1$$

para verificar esto

$$x(0) = \Phi(0) \cdot x(0) = x(0)$$

y

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t) \cdot x(0) = A\Phi(t) \cdot x(0) = Ax(t)$$

A partir de estas ecuaciones obtenemos

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

Por tanto, podemos decir que Φ(t) se denomina matriz de transición de estados. Siendo esta matriz la que contiene toda la información acerca del movimiento libre del sistema.

- Si los valores característicos $\lambda 1, \lambda 2, \ldots \lambda n$ de la matriz A son distintos, entonces Φ(t) contendrá las n exponenciales $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t} \cdots$

  En particular, si la matriz A es diagonal

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Si hay una multiplicidad en los valores característicos como $\lambda 1, \lambda 1, \lambda 1, \lambda 4, \lambda 5, \ldots \lambda n$ entonces Φ(t) contendrá además de las exponenciales $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t} \cdots$, términos como $te^{\lambda_1 t}$ y $t^2 - e^{\lambda_1 t}$

8.5.2. SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE ESTADO PARA EL CASO NO HOMOGÉNEO

En este apartado estudiamos el caso no homogéneo para la solución de la ecuación de estado, aplicando también el enfoque de la transformada de Laplace.

DESCRIPCIÓN:

Consideramos la ecuación de estado no homogéneo descrita mediante

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

x: vector de dimensión n

u : vector de dimensión r

A : matriz de coeficientes constantes de n*n

B : matriz de coeficientes constantes de n*r

Si escribimos la ecuación como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

y premultiplicamos ambos miembros de esta ecuación por e^{-At}., obtenemos

$$e^{-At}\left[\dot{x}(t) - Ax(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[e^{-At}x(t)\right] = e^{-At}Bu(t)$$

Al integrar la ecuación entre t y 0

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\cdot d\tau$$

La ecuación también se escribe como

$$x(t) = \Phi(t)\cdot x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\cdot Bu(\tau)\cdot d\tau$$

$$\Phi(t) = e^{At}$$

La solución x(t) es claramente la suma de un término formado por la transición de estados inicial y un término que surge del vector de entradas.

8.5.2.1. ENFOQUE DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE ESTADO

La solución de la ecuación de estado no homogénea:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

También puede obtenerse mediante el enfoque de la transformada de Laplace. La transformada de Laplace de esta última ecuación produce:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

o bien

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

Premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación por $(sI - A)^{-1}$., obtenemos

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$X(s) = L\left[e^{At}\right]x(0) + L\left[e^{At}\right]BU(s)$$

La transformada inversa de Laplace se obtiene mediante la integral de convolución, del modo siguiente:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\cdot d\tau$$

Si el tiempo inicial no fuera cero sino t0, la solución sería:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\cdot d\tau$$

Ejemplo

Sea el sistema mecánico de la figura. Se supone que el sistema es lineal. La fuerza externa u(t) es la entrada al sistema y el desplazamiento y(t) de la masa es la salida. Calcular la descripción del sistema en espacio de estados y su función de transferencia.

Suponiendo que en ausencia de fuerza externa medimos el desplazamiento y(t) desde la posición de equilibrio, obtenemos la ecuación:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

Las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se definen como:

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_1(t) = \dot{y}(t)$$

Entonces tenemos que las ecuaciones de estado y de salida son:

$$\left.\begin{array}{c} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-ky - b\dot{y}) + \frac{1}{m}u \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \end{array}\right\}$$

$$y = x_1$$

Lic. Katya Perez M.
Ing. Carla Escobar O.

Podemos escribir las ecuaciones anteriores de forma matricial:

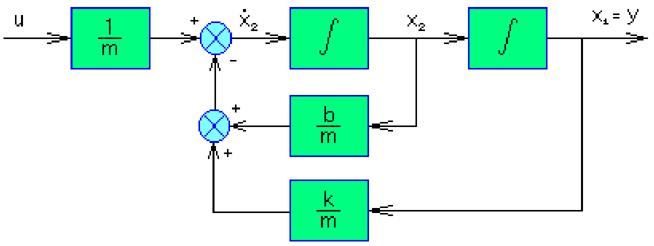
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

De aquí podemos sacar los valores de las matrices A, B, C y D:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

En la siguiente figura, representamos el diagrama de bloques de este sistema:



Vemos que las salidas de los integradores son las variables de estado.

A continuación, hallamos la función de transferencia del sistema. Sabemos que:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} + 0 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ k/m & s + \dfrac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ k/m & s + \dfrac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \dfrac{b}{m}s + \dfrac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \dfrac{b}{m} & 1 \\ -k/m & s \end{bmatrix}$$

Tenemos que la función de transferencia es:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -k/m & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Lic. Katya Perez M.
Ing. Carla Escobar O.