## I. INTRODUCCION

El principal propósito de este compendio es ofrecer, un contenido base de las matemáticas que son parte de una orientación para los estudiantes de primer semestre de la carrera de ingeniería de sistemas y en general de toda ingeniería. El material en su mayoría esta presentado en forma didáctica y compresible, lo que ayudara al estudiante a continuar y comprender las materias de los siguientes semestres de la carrera de ingeniería de sistemas.

Este trabajo esta dividido en ocho temas, lógica básica, teoría de conjuntos, números enteros, técnicas de conteo, números complejos, relaciones, funciones matemáticas y estructuras algebraicas.

El dossier empieza con lógica porque es una ciencia fundamental en todo aprendizaje, es decir si un estudioso en particular un ingeniero de sistemas desea demostrar una situación dada por ejemplo un algoritmo parte de un programa o sistema debe utilizar un sistema de lógica.

El segundo tema son los conjuntos. Al estudiar álgebra, geometría, combinatoria y todas las áreas de las matemáticas, siempre esta presente la teoría de conjuntos porque ayuda y justifica la compresión de esta ciencia exacta. Se mostrara como problemas de relativa complejidad son resueltos entendidos a través de la teoría de conjuntos.

Los números enteros otra unidad en este trabajo. Para demostrar y entender ciertos teoremas de la matemática es necesario saber que son los enteros, en particular los enteros positivos, que propiedades tiene, las cuales nos permiten establecer ciertos teoremas, formulas y demostrarlas a través del método de inducción matemática.

En el área de la matemática se presentan muchos problemas que son enunciados en forma sencilla pero que a simple vista son difíciles de resolver. Existe la técnica de conteo que ayuda a resolver estos problemas. Así por ejemplo se desea formar una clave de seguridad que tenga una letra, un número y además estén colocados en forma alterna; se pregunta ¿cuantos códigos se pueden formar?.

El quinto tema son los números complejos los cuales aparecieron al buscar soluciones para ecuaciones como x2 = -1. No existe ningún número real x cuyo cuadrado sea -1, por lo que los matemáticos de la antigüedad concluyeron que no tenía solución. Sin embargo, a mediados del siglo XVI, el filósofo y matemático italiano Gerolamo Cardano y sus contemporáneos comenzaron a experimentar con soluciones de ecuaciones que incluían las raíces cuadradas de números negativos.

Es importante el estudio de los números complejos porque es una herramienta de trabajo del álgebra ordinaria, llamada álgebra de los números complejos, así como de ramas de las matemáticas puras y aplicadas como variable compleja, aerodinámica y electromagnetismo entre otras de gran importancia. Estos números representan todas las raíces de los polinomios a diferencia de números reales.

Las relaciones matemáticas es un tema tan importante para comprender la teoría de funciones la cual interviene en la comprensión del álgebra, la trigonometría y el calculo.

Las relaciones es un tema que sirve como punto de partida al estudio de las funciones en el primer semestre de cualquier carrera de ciencias exactas o ingenierías. De inmediato se introduce el concepto de función a partir de una serie de situaciones concretas que nos permiten entender qué se entiende por función y las múltiples maneras de referirse a una función.

A continuación, y partiendo de esas mismas situaciones, se pasa a estudiar los elementos comunes a todas las funciones: el dominio y el recorrido, y de algunas propiedades básicas que pueden tener las funciones (monotonía, extremos relativos, simetrías y acotación), explicando cómo reconocerlas y qué utilidad pueden tener. No se mencionan otras propiedades como continuidad, asíntotas, periodicidad, etc pues o bien estas propiedades forman parte de otros temas del currículo o bien para explicarlas con mayor claridad se necesitan funciones más complejas de las que analizamos aquí y que también se estudiarán en otros temas, por lo que parece más adecuado introducir esas propiedades en los temas correspondientes. En general este tema tiene como objetivo aprender a reconocer relaciones numérica entre dos o mas tipos de magnitudes.

En esta última parte del compendio se hace mención de las operaciones binarias de enteros y la suma; en general de números reales, tomando en cuenta algunas propiedades de estas combinaciones se forman estructuras de grupos de conjuntos con denominaciones especiales. También se hace análisis de conjuntos de elementos que son cerrados en dos operaciones

En general el capítulo enseña la aplicación de las estructuras y en particular de los anillos finitos en teoría de números y ciencias de la computación.

**II. CONTENIDO O CUERPO DEL DOSSIER**

## TEMA 1

## LÓGICA BÁSICA

## Introducción

Todo desarrollo matemático exige razonar en forma válida acerca de cosas trascendentes y particularmente abstractas.

Cuando un matemático desea ofrecer una demostración de una situación dada, debe utilizar un sistema lógico, lo cual también es cierto para un científico de la computación que desarrolla algoritmos necesarios para un programa o sistema de programas.

## Enunciados (Proposiciones) y Conectivas

***Proposiciones***

Consideremos las siguientes oraciones:

1. ¿ Cuál es la situación económica de Bolivia? Oración Interrogativa
2. Levántate y resplandece Oración de orden
3. Bolivia es diversa Oración declarativa
4. El factorial Oración declarativa
5. María ama Matemáticas Oración declarativa
6. 8 + 5 = 13 Oración declarativa

De las oraciones 1 y 2 no podemos decir que son falsas o verdaderas, pero de las oraciones 3,4,5 y 6 tiene sentido decir que son falsos o verdaderas, por tanto estas últimas son llamadas proposiciones.

Luego

***Definición***

Proposición es toda oración declarativa respecto de lo cual puede decirse se es verdear o falsa. (Pero no ambos a la vez)

***BD05048_***

***¿Para que se aplica la lógica de las matemáticas***?

La lógica de las matemáticas se aplica para decidir si una proposición se sigue o es consecuencia lógica de una o más proposiciones.

Pero

BD05048_

***¿Qué es la lógica?***

Es una ciencia que estudia la inferencia que tienen los hombres para decidir lo verdadero o falso.

***Notación***

Para denotar proposiciones utilizamos las letras p, q, r, etc.

## Proposiciones en las matemáticas

En las matemáticas las proposiciones fundamentales son:

1. los axiomas o postulados

Son proposiciones cuya VALIDEZ, se aceptan sin demostración

1. los teoremas

Son proposiciones que para ser VALIDAS, necesitan de su demostración.

Los teoremas se demuestran usando los axiomas y algunas tautologías lógicas.

1. los corolarios

Son proposiciones que son consecuencia d algunos teoremas

1. los lemas

Son proposiciones previas a la demostración de algunos teoremas

## Tipos de Proposiciones

# Proposiciones simples

BD14600_Una proposición es simple cuando no lleva conectivos oracionales

**Ejemplo**

p: 2 +2 = 4

q: todo triángulo es un rectángulo

*BD14600_*Una proposición es compuesta cuando lleva conectivos oracionales.

# Proposiciones compuestos

**Ejemplo**

p: 6 >0 y 5<3

## Conectivas

A partir de las proposiciones simples es posible generar otras, simples o compuestas, es decir operar con las proposiciones utilizando conectivos lógicos.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Conectivos** | **Operación asociada** | **Significado** |
| ~ o ¬ | Negación | No *p* o no es cierto que *p* |
| ∧ | Conjunción o producto lógico | *p* y *q* |
| ∨ | Disyunción o suma lógica | *p o q* (en sentido excluyente) |
| ⇒ | Implicación | *p* implica *q* osí *p entonces q* |
| ⇔ | Doble implicación | *p si y solo si q* |
| ∨ | Diferencia Simétrica | *p* o *r* (en sentido excluyente) |

## Tabla de Verdad

La verdad o falsedad de una proposición se denomina su VALIDEZ (o su valor de verdad). La validez de la conjunción, de la disyunción, de la condicional, etc se pueden representar en tablas.

En consecuencia:

Dadas dos o más proposiciones simples cuyos valores de verdad son conocidos, el VALOR DE VERDAD de una proposición compuesta depende de al verdad de cada una de las proposiciones componentes y se determina mediante tablas de verdad.

BD14749_

# Negación

Negación de la proposición p es la proposición ~ p, se lee como:

* no p
* no es cierto que p
* ni p

Cuya tabla de verdad de al negación puede representarse como sigue:

|  |  |
| --- | --- |
| **p** | **~ p** |
| V | F |
| V | F |

**Ejemplo**

~ p: Todo mamífero es carnívoro

~ p: no todo mamífero es carnívoro

~ p: no es cierto que todo mamífero sea carnívoro

~ p: hay mamíferos que no son carnívoros

~ p. Existen mamíferos carnívoros

BD14749_

# Conjunción

Conjunción de las proposiciones p y q es la proposición p ∧ q, cuya tabla de verdad es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **P** | **q** | **p ∧ q** |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

El principio lógico de la conjunción es:

“*La conjunción de p* ∧ *q es verdad cuando todos sus elementos son verdaderos y es falso cuando alguno de sus elementos o todos ellos sean falsos”*

**Ejemplo**

* + - (22 = 4) ∧ (2 + 2 = 4)
    - p: Bolivia es diversa

q: Bolivia tiene salida al mar

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **P** | **q** | **p ∧ q** |
| V | F | F |

BD14749_

# Disyunción

* ***Incluyente (o débil)***

Disyunción de las proposiciones p y q es la proposición p ∨ q ( p o q) cuya tabla de valores de verdad es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **p ∨ q** |
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

El principio lógico de la disyunción:

“*La disyunción inclusiva de p∨ q es verdad cuando por lo menos una de las proposiciones componentes es verdad. Es falso solo cuando las dos son falsas”*

**Ejemplo**

p: es número primo

q : 2 es número par

Luego:

p ∨ q es Verdad, ya que una o ambas son verdaderas

* ***Excluyente ( o fuerte)***

Diferencia simétrica o disyunción excluyente de las proposiciones p y q es la proposición p ∨ q y se lee:

* o *p*, o *q*
* *p* o *q*, pero no ambos

cuya tabla de verdad es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **p ∨ q** |
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

El principio lógico de la disyunción es:

“*La disyunción exclusiva de p∨ q es verdad solo cuando uno de sus componentes es verdadero6”.*

**Ejemplo**

* + - llegarás en tren o en avión
    - apruebas la materia o repruebas

En ambas proposiciones o ocurre un hecho o el otro pero no ambos a la vez.



# Implicación

Implicación de las proposiciones p y q es la proposición p ⇒ q (p implica q, si p entonces q) y se lee:

* p implica q
* si p entonces q
* p es suficiente para q
* q es necesario para p

cuya tabla de verdad es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **p ⇒ q** |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

El principio lógico de la condicional implicación es:

“*La condicional es FALSA, solo sí el antecedente es verdad y el consecuente es falso, siendo verdadero en todos los demás casos”*

**Ejemplo**

1. Si un polígono es un cuadrado entonces el polígono es rectángulo

p: un polígono es un cuadrado

q: el polígono es rectángulo

* + Para que el polígono sea rectángulo *es suficiente* con que sea un cuadrado
  + Para que un polígono sea un cuadrado es condición necesaria que el polígono sea rectángulo

2. 

La condicional está asociada a otras tres proposiciones importantes:

## Proposición recíproca

La proposición recíproca que corresponde a la condicional 

**Ejemplo**

* + Si un polígono es un cuadrado entonces el polígono es rectángulo

p ⇒ q

Si el polígono es rectángulo entonces un polígono es un cuadrado

q ⇒ p

* + Si 3 \*4 = 12 entonces 3 divide a 12

p ⇒ q

Si 3 divide a 12 entonces 3 \* 4 = 12

q ⇒ p

## Proposición inversa o contraria

La proposición inversa que corresponde a la condicional 

**Ejemplo**

* + Si *x* es mayor que cero, entonces *x* es positivo

p ⇒ q

Si *x* no mayor que cero, entonces *x* no es positivo

~ p ⇒ ~ q

# Proposición contra recíproca

La proposición contra recíproca que corresponde a la condicional 

**Ejemplo**

* + Si un polígono es un cuadrado entonces el polígono es rectángulo

p ⇒ q

Si el polígono no es rectángulo entonces un polígono no es un cuadrado

~ q ⇒ ~ p

* + Si *n* es número par, entonces *n* es divisible por 2

p ⇒ q

Si *n* no es divisible por 2, entonces *n* no es número par

~ q ⇒ ~ p

BD14749_

# Doble Implicación

Doble implicación de las proposiciones p y q es la proposición

y se lee:

“ *p* si y solo si *q*”

Cuya tabla de verdad es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **p ⇔ q** |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

El principio lógico o regla de la bicondicional es:

“Una proposición bicondicional es verdadera si ambos componentes son verdaderos o falsos, en otro caso es falso”

##### Ejemplo

* + Eres moral *si y solo sí* respetas el deber
  + a\* b = 0 *sí y solo sí* a = 0 ∨ b = 0
  + a2 = 4 *sí y solo sí* a = 2 ∨ a = -2

## Fórmulas Proposicionales

Una fórmula proposicional es una combinación de proposiciones y conectivos lógicos que simboliza a una proposición compuesta o molecular.

##### Ejemplo

1. Simbolizar la siguiente proposición

“Si se realiza el bloqueo de caminos entonces habrá escasez de alimentos y aumentará los precios”

Simbolizando:

p: se realiza el bloqueo de caminos

q: habrá escasez de alimentos

r: aumentarán los precios

Esto es:



1. Simbolizar la siguiente proposición

“La mortalidad infantil disminuirá si hay atención del gobierno o no habrá desarrollo demográfico si la mortalidad no disminuye”

Simbolizando:

p: la mortalidad infantil disminuirá

q: hay atención del gobierno

r: habrá desarrollo demográfico

Esto es:



1. Simbolizar la siguiente proposición

“Las pretensiones saláriales son atendidas si y solo sí la economía del país mejora, entonces la calidad de vida de las personas mejora”

Simbolizando

p: las pretensiones saláriales son atendidas

q: la economía del país mejora

r: la calidad de vida de las personas mejora

Esto es:



## Evaluación de funciones proposicionales por la tabla de verdad

Consiste en hallar los valores del operador principal a partir dela validez de cada una de las proposiciones simples (variables proposicionales)

Si en una fórmula proposicional intervienen “n” proposiciones simples diferentes entonces en al tabla de valores de verdad habrá 2n combinaciones diferentes donde 2 es una constante que indica los dos valores V y F que tiene una proposición simple

##### Ejemplo

Construir la tabla de verdad de la proposición



Son 3 proposiciones simples entonces se analizarán 23 = 8 renglones

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **r** | **p ⇒ ( q ∧ r)** | | | | |
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | F | V | F | F |
| V | F | V | V | F | F | F | V |
| V | F | F | V | F | F | F | F |
| F | V | V | F | V | V | V | V |
| F | V | F | F | V | V | F | F |
| F | F | V | F | V | F | F | V |
| F | F | F | F | V | F | F | F |

## Tautología, Contradicción y Contingencia

BD14578_ Una fórmula proposicional es **TAUTOLÓGICA** cuando los valores de su operados principal son todos verdaderos.

**Ejemplo**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **[ p ∧ ( p ⇒ q) ] ⇒ p** | | | | | | |
| V | V |  | V |  | V |  | V |  |
| V | F |  | F |  | F |  | V |  |
| F | V |  | F |  | V |  | V |  |
| F | F |  | F |  | V |  | V |  |

BD14578_ Una fórmula proposicional es **CONTRADICTORIO** cuando los valores de su operador principal son todos FALSOS

**Ejemplo**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **( ~p ⇒ q ) ⇔ (~p ∧ ~q )** | | | | | | |
| V | V |  | V |  | F |  | F |  |
| V | F |  | V |  | F |  | F |  |
| F | V |  | V |  | F |  | F |  |
| F | F |  | F |  | F |  | V |  |

BD14578_ Una proposición molecular es **CONTINGENTE** cuando en su resultado hay por l menos una verdad y una falsedad

**Ejemplo**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **r** | **( q ⇒ r) ∨ (~p ⇒ r)** | | | | |
| V | V | V |  | V | V | V |  |
| V | V | F |  | F | V | V |  |
| V | F | V |  | V | V | V |  |
| V | F | F |  | V | V | V |  |
| F | V | V |  | V | V | V |  |
| F | V | F |  | F | F | F |  |
| F | F | V |  | V | V | V |  |
| F | F | F |  | V | V | F |  |

## Equivalencia lógica

Dos fórmulas proposicionales son equivalentes si los valores de verdad de los operadores principales son iguales.

##### Ejemplo



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **p ⇔q** | **(p ⇒ q) ∧ (q ⇒p)** | | | | | |
| V | V | V |  | V |  | V | V |  |
| V | F | F |  | F |  | F | V |  |
| F | V | F |  | V |  | F | F |  |
| F | F | V |  | V |  | V | V |  |

Son equivalentes

##### Ejercicio

Sabiendo que los valores de verdad de las proposiciones *p, q, r* son respectivamente V, F, V determinar el valor de verdad de:



*Solución*



## Leyes Lógicas

En lógica existe la necesidad de simplificar fórmulas proposicionales complejas a través de ciertas equivalencias llamadas leyes lógicas.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **LEYES LÓGICAS** | | |
| **LEY DE LA DOBLE NEGACIÓN (INVOLUCIÓN)** | | LEYES DE LA ABSORCIÓN |
| La negación de la negación es una afirmación | |  |
| **LEY DE NO-CONTRADICCIÓN** | |
|  | Una proposición no puede ser verdear y falsa a la vez |
| **LEY DEL TERCIO EXCLUIDO** | |
|  | Una proposición o es verdear o falsa, no hay una tercera posibilidad |
| **LEY DE LA ÍDEM POTENCIA** | | LEYES DEL NEUTRO |
|  | En general:    Las variables proposicionales redundantes en una cadena de conjunciones o de disyunciones se elimina |  |
| LEYES CONMUTATIVAS | | **DEFINICIÓN DE LA IMPLICACIÓN** |
|  | La conjunción, la disyunción y la bicondicional de dos proposiciones son conmutativas |  |
| LEY ASOCIATIVA | | **DEFINICIÓN DE DISYUNCIÓN EXCLUYENTE** |
|  | |  |
| LEYES DISTRIBUTIVAS | | DEFINICIÓN DE LA DOBLE IMPLICACIÓN |
|  | |  |
| LEYES DE MORGAN | |  |
|  | |  |

## Simplificación de fórmulas proposicionales

Se trata de transformar una fórmula proposicional en otra equivalente a ella pero lo más reducida posible. Para lo cual se debe usar oportunamente las leyes lógicas. Así mismo, deben especificarse en cada paso la ley o leyes que fueron utilizadas

**Ejemplo**

1. Simplificar la siguiente proposición



Solución



2. Simplificar



Solución



## Reglas de inferencia y de demostración

Se presenta continuamente la necesidad de demostrar la verdad de , para esto se presentan dos métodos:

1. ***Directo.*** Si *p* es F, nada hay que probar, pues en este caso es Verdad

Si *p* es verdad hay que establecer que el valor de verdad de *q* es Verdad

1. ***Indirecto***. Si q es Verdad queda establecido la verdad de 

Pero si *q* es Falso hay que examinar *p* y llegar a establecer que su valor de verdad es Falso

WB00476_

La inferencia es el proceso de pasar de un conjunto de premisas a una conclusión

La inferencia es una condicional de la forma:



*También llamado argumento lógico o razonamiento*

Aquí ***n*** es un entero positivo, las proposiciones se denomina premisas y la proposición ***q*** es la conclusión del argumento.

Cuando ***q*** es consecuencia (conclusión) de las premisas se escribe:

**.**

**.**

**.**



Premisas

(hipótesis)

Conclusión

El resultado de la implicación puede ser:

1. si la implicación es una tautología, entonces se tiene una inferencia válida (o argumento válido)
2. si la implicación es Falsa entonces se tiene la llamada FALASIA

##### Teorema

BD21491_Si la implicación es valido y las premisas  son verdaderas entonces la conclusión “q” es correcta.

##### Ejemplo

Sean las proposiciones p, q, r proposiciones primitivas dados como:

p: Juan lee mucho

q: Juan cambiará su personalidad

p1: Si Juan lee mucho entonces cambiará su personalidad

p2: Juan no cambia su personalidad

*Conclusión*:

Juan no lee mucho

Para establecer que un argumento es válido se utilizará las técnicas llamadas reglas de inferencia.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **REGLAS DE INFERENCIA** | | | |
| **Nombre de la regla** | **Significado** | **Implicación lógica relacionada** | **Regla de inferencia** |
| MODUS PONENDO PONES (PP) | Método (Modus)  Que afirma (ponens) el consecuente  Afrimando (poniendo) el antecedente |  |  |
| MODUS TOLENDO TOLLENS | Método (Modus)  Que negando (tollendo) el consecuente  Se puede negar (tollens) el antecedente |  |  |
| MODUS TOLLENDO PONES (TP) | Método (Modus)  Que negando (tollens) un miembro de una disyunción se afirma (ponens) el otromiembro |  |  |
| LEY DEL SILOGISMO HIPOTÉTICO (SH) |  |  |  |
| LEY DE LA SIMPLIFICACIÓN |  |  |  |
| LEY DE LA ADICIÓN (LA) |  |  |  |
| LEY DE LA CONJUNCIÓN |  |  |  |

## Método de Demostración

Hay dos métodos para demostrar una proposición

## Método directo de demostración

Consiste en utilizar la validez de la inferencia de la forma:



En esta forma de demostración, se utilizan las premisas *p*i, paso a paso hasta verificar la conclusión *q.*

## Método por reducción al absurdo (o indirecto)

Este método consiste en negar la conclusión q y considerar como premisa luego se trata de inferir válidamente la negación de alguna de las premisas *p*i, del conjunto

Es decir se construye y se verifica la validez de la siguiente inferencia:



*Negación de la conclusión (negando la tesis)*

*Negación de una de las premisas*

**Ejemplo**

Por los métodos de demostración comprobar la validez de la siguiente inferencia lógica.



|  |  |
| --- | --- |
| ***Método Directo*** | ***Método Reducción al absurdo*** |
|  |  |

## CUANTIFICACIÓN

Dado el siguiente enunciado abierto:

“*x* +1 es un entero impar”

No podemos decir nada acerca de su verdad o falsedad, pues *x* debe tener un valor para que sea proposición (verdadera o falsa)

Al tratar los enunciados abiertos se usará la siguiente notación:

*p(x)* : *x* +1 es un entero impar

# 

# Llamada función proposicional

***Nota:*** *q(x), r(x) ,* etc

Para valores específicos de *p(x)*:

|  |  |
| --- | --- |
| P(3): 3 +1 es un entero impar | F |
| P(2): 2 +1 es un entero impar | V |
| P(5): 5 +1 es un entero impar | F |

Si negamos la proposición *p(x)* tenemos:

*¬ p(x)*: *x* +1 no es un entero impar

Se presenta también funciones proposicionales con dos variables

*p(x,y)*: *x* es divisor de *y*

Para valores específicos de *p(x,y)*:

|  |  |
| --- | --- |
| P(-2,6): -2 es divisor de 6 | V |
| P(4,8): 4 es divisor de 8 | V |
| P(3,25): 3 es divisor de 25 | F |

Si negamos la proposición *p(x,y)* tenemos:

*¬ p(x,y)*: *x*  es divisor de *y*

A partir de funciones proposicionales es posible obtener proposiciones generales mediante un proceso de cuantificación.

Luego se tiene dos tipos de cuantificaciones:

## Cuantificación Universal

Se lee:

* Para todo *x*
* Para cada *x*
* Para cualquier *x*
* Cualquier *x*

☞



☞

Se lee:

* Para todo *x,y*
* Para cada *x,y*
* Para cualquier *x,y*
* Cualquier *x,y*



### Cuantificación existencial

Se lee:

* Para algún *x*
* Para al menos un *x*
* Existe un *x* tal que
* Hay *x* que



☞

Se lee:

* Para algún *x,y*
* Para al menos un *x,y*
* Existe un *x,y* tal que
* Hay *x,y* que



☞

## Regla de la negación en cuantificación

1. Sea

*r(x)*: “*2x* es un entero par”

⇒  es Verdadero

También

 es Verdadero

Si negamos la proposición *r(x)*:



⇒  es Falso

 es Falso

1. Sea la siguiente proposición:

“Todo metal se dilata”

Esta proposición puede enunciarse:

“Cualquier que sea el metal se dilata”

Luego:

*p(x)*: x se dilata



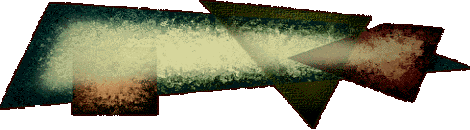
Negando ¬[] tenemos:



“Existe algún metal *x* que no se dilata”

“ No todos los metales se dilatan”





#### Ejercicios

Expresar simbólicamente las siguientes proposiciones, negarlas y retraducirlas al lenguaje oral.

1. “Todo número es divisible por 3, es par”
2. “Todo cuerpo se desplaza o cambia de posición”

## CIRCUITOS LÓGICOS

Un circuito lógico es un interruptor que puede estar abierto o cerrado. Cuando el interruptor esta abierto no permite el paso de corriente , mientras cuando esta cerrado pasa corriente. Si asociamos a una proposición a un interruptor , observamos que en el álgebra de circuitos la V indica que el interruptor esta cerrado y F el interruptor esta abierto.

El circuito lógico que representa a una proposición p es:

●

## p

## Si p es verdadero V se tiene:

## ● ●● ●

## p = V pasa corriente

Si p es verdadero **F** se tiene:

## ● ● ● ●

## p = F no pasa corriente

## CLASES DE CIRCUITOS

Existen dos clases de circuitos:

- Serie

- Paralelo

## Circuitos en Serie. La conjunción de dos proposiciones (p ^ q) esta representada por un circuito lógico en serie. Es decir:

● ●

**p q**

**p** y **q** conectados en serie

## Este circuito permite el paso de corriente si p y q son verdaderos(cerrados)

***Circuitos en Paralelo***. La disyunción de dos proposiciones (p v q) esta representada por un **circuito** lógico en paralelo. Es decir

**p**

**q**

## 

**P** y **q** conectados en paralelo

Ejemplo.

Representar el circuito lógico de p q

El circuito lógico se puede escribir con otra formula proposicional equivalente como sigue:

## 

## TEMA 2

## CONJUNTOS

## 2.1 Introducción

## 2.1.1 Noción de conjunto

Toda agrupación o colección de objetos es considerado como CONJUNTO.



Los objetos que pertenecen al conjunto se llaman ELEMENTOS

## 2.1.2 Notación

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas:

Los elementos se denotan con las letras minúsculas:

## 2.2 Pertenencia

La relación de elementos a conjuntos es de pertenencia

## 2.2.1 Notación



### Negando



Sea el conjunto

Luego:

1. 24 ∈ *A* c) 51∉*A*
2. 30 ∈ *A* d) 69 ∉*A*

## 2.2.2 Determinación o designación de conjuntos

Un conjunto puede describirse de dos formas:

WB00618_ Por extensión

WB00618_ Por compresión

# Determinación por extensión

Un conjunto se designa por extensión, cuando es posible indicar explícitamente los elementos del conjunto, escribiéndolos uno a continuación del otro, separados por una coma y encerrados entre llaves.

# Determinación por comprensión

Un conjunto se designa por comprensión cuando los elementos del conjunto pueden expresarse mediante una propiedad que es característica única entre ellas.

### Ejemplo

### Por extensión

V = {b, c, d, f, g,..}

### Por comprensión

V = {*x/x* es una consonante}

# Conjuntos numéricos



#### Conjunto de los número naturales



#### Conjunto de los números enteros



#### Conjuntos de los números racionales



Algunos números racionales son:



# Nota.-



Los números racionales contienen a los y

#### Conjunto de los números Irracionales

Es el conjunto de los números NO RACIONALES, es decir, aquellos números que no pueden expresarse como fracciones de la forma , con *m* y *n* ∈ , n ≠ 0.



#### Conjunto de los números reales



El conjunto de los números reales, es la reunión de los números naturales, enteros, racionales e irracionales, es decir:



= ∪ ∪ ∪

Intuitivamente los números reales se representan por una receta y los llamamos recta real

-∞

0

+ ∞



#### Conjunto los números complejos

= { *a* + *bi / a∈* ∧ b *∈*  *,* i = √-1 }



A continuación daremos algunos ejemplos de conjuntos designados por extensión y comprensión.



# Diagrama de Venn

Consiste en representar los conjuntos mediante círculos

##### E

Un elemento del conjunto será representado por un punto interior a la cuerda, un elemento que no pertenezca al conjunto será representado por un punto exterior a la cuerda. Ningún elemento puede ser representado por un punto situado sobre la cuerda.



Representar el conjunto *A = {a, e, i, o, u}* en diagramas de Venn

##### AA

*.a .u*

*.e*

*.o .i*

*.f*

### Conjuntos especiales

1. *Conjunto vacío.*

Es aquel que no tiene elementos. Se denota por la letra griega Φ (fi). También se denota por : { }

Formalmente :



1. *Conjunto universo.*

El conjunto de todas los objetos que representa la variable *x*, en un determinado tema de interés, se llama el UNIVERSO de la variable o conjunto de la variable.

Formalmente:



a) 

Podemos definir el conjunto de *A* como



También se puede escribir:



b) 

Podemos definir el conjunto de I como:



También se puede escribir:



En un diagrama de Venn, el conjunto universo se representa por un rectángulo:

##### A

###### U

1. *Conjunto unitario*

Conjunto unitario, es aquel que tiene un solo elemento del conjunto universal.



1. *Conjuntos finitos, infinitos*

Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos. Un conjunto es finito si está vacío o si consta exactamente de *n* elementos en donde *n* es un entero positivo, de otra manera es infinito.



* Sea M el conjunto de los días de la semana



* Sea  entonces *R* es un conjunto finito
* Sea  entonces *Q* es conjunto infinito
* El conjunto de líneas paralelos al eje *x*, es conjunto infinito

## IInclusion

Un conjunto *A* es un subconjunto de un conjunto *B* si y solo sí, cada elemento de *A* es un elemento de *B*. Denotado por *A* ⊂ *B* .

En símbolos:



**☞**

Se lee:

* *A* está contenido en *B*
* A es subconjunto de B
* *A* es parte de *B*

Negando:



En diagrama de Venn, esto es:

##### B

A



1. Si *A* = {1,4,6} y *B* = {1,4,6,15} entonces *A* ⊂ *B*

Luego:

##### B

A

**.**15

**🖎 piense y escriba**

1. Si *A* ={*x / x* es un número par positivo} y *B* = { *x / x* es un entero positivo}

entonces \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

## 2.3.1 Igualdad de conjuntos

## Definición



“El conjunto A es igual al conjunto B si y solo si A esta contenido en B y B está contenido en A”

BD04915_



¿*A* y *B* son conjuntos iguales?

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

## Subconjunto propio

Un conjunto *A* es un subconjunto propio de un conjunto *B* si:

* Cada elemento de *A* es un elemento de *B*

➋ *A* y *B* no son iguales

esto es:



## 2.3.3 Propiedades de la inclusión

Si A, B y D son conjuntos arbitrarios, entonces las propiedades de la inclusión son:

**(P1): Reflexividad.** Todo conjunto es parte de sí mismo.



**(P2): Transitividad.** Si un conjunto es parte de otro y este es parte de un tercero, entonces el primero está incluido en el tercero.



**(P3): Antisimetrica.** Si un conjunto es parte de otro y éste es parte del primero entonces son iguales.



**(P4): El conjunto vacío está incluido en cualquier conjunto**



## Conjunto potencia de un conjunto (o conjunto de partes de un conjunto)

***Definición :*** Dado un conjunto *A*, definimos el conjunto potencia de *A*, al conjunto formado por todos los subconjuntos de *A*.

# Notación: El conjunto potencia de A se denota por P(A) o por 2A

# Definición simbólica



“ El conjunto potencia de *A*, es igual , al conjunto de los elementos de *X*, tales que, los *X* son subconjuntos de *A*”



Por lo tanto:



Además si el número de elementos de *A* es *k*, *k* ∈ , entonces el número de elementos de *2A* es *2k*.



BK00003_

**Ejemplo**

Determinar el conjunto de partes de:

*A = {1,2,3}*

###### **Solución**

Como A tiene 3 elementos entonces el conjunto de partes de A tendrá 23 = 8 elementos que son todos los subconjuntos de A:

Esto es:

P(A) = 2A = {{1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3},{}}

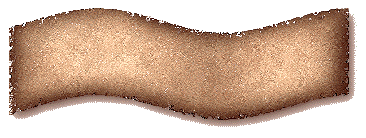
*A*

## 

## 2.5 Operaciones con conjuntos

Son operaciones de conjuntos:

Dados dos conjuntos *A* y *B*, definimos la unión de *A* con *B* como el conjunto:





Por lo tanto:



“*x* pertenece a la unión de *A* con *B*, es equivalente a que *x* pertenece al conjunto *A* o *x* pertenece al conjunto B”

El diagrama correspondiente es:

**A∪B**

##### B

A



Ejemplo

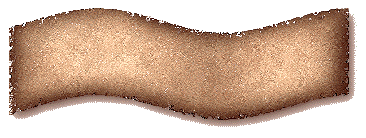
Sea C = { *x /x* es una consonante}

V = *{ x / x* es una vocal}

Luego:

C ∪ V = {*x / x* es una letra del alfabeto}

Dado los conjuntos, definimos la intersección de *A* y *B* como el conjunto:





Por lo tanto:



El diagrama de Venn correspondiente es:

**A∩B**

##### B

A

PE03257_

El conjunto **A∩B** contiene sólo los elementos comunes de A y B

WB00570_

Ejemplo

Sea *A* = {x / x2 – x – 2 = 0} de aquí *A* = {-1,2}

B = { x ∈ N/ x < 3 } de aquí B = { 0,1,2}

* A ∩ B = {2}

##### B

A

***A ∩ B***

**.**0

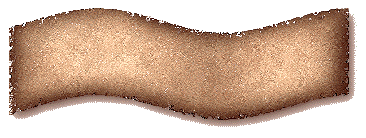
**.**1

**.**2

**.**1

Sea ***A ⊂ U***, donde ***U*** es el conjunto UNIVERSO; entonces definimos EL COMPLEMENTO DE ***A***, al conjunto formado por todos elementos de ***U*** que no pertenecen al conjunto *A*.

En símbolos:







El diagrama de Venn correspondiente es:

A

***AC***

***Notación.-***





Sea *U* = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} y los conjuntos:

*A* = {1,3,5,7} *AC*={ }

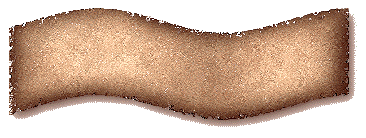
*B* = {*x∈U* / 4<*x*<8} *BC*={ }

*C* = {2,4,6,8,10} *CC*={ }



Ejemplo

Sean *A* y *B* dos subconjuntos del conjunto universal definimos la diferencia entre *A* y *B* (en este orden), denotado por ***A – B***, al conjunto:





Luego:



En consecuencia:



El conjunto ***(A-B) ⊂ U***, se caracteriza, por la siguiente propiedad



El diagrama de Venn correspondiente es:

##### B

A

A - B = A ∩ BC

***Definición***

Si *A* es subconjunto de *B*, se define el complemento de *A* con respecto a *B*, a la diferencia ***B -A***

***Notación***



En símbolo:



En diagrama de Venn

##### B

A



B-A

Sea *A* = {a, b, c, m, n } *B* = {p, q, a, r, c, t}

La diferencia de ***A - B***  es:

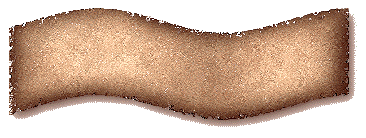
A – B = {b, m, n}



Ejemplo

Dado dos conjuntos *A* y *B* de *U* definimos el conjunto diferencia de *A* y *B*, denotado por

*A* ▲ *B* , al conjunto:





El diagrama correspondiente es:

##### B

A

*A* ▲ *B*

Otra definición de la diferencia simétrica es:



Sea *A* = {a, b, c, 2, 3, 4, 5 } *B* = {a, 3, 5, c, 8}

⇒ A ▲ B = (*A* ∪ *B*) *-* (*A* ∩ *B*)

= {a, b,c,2,3,4,5,8} – {a,c,3,5}

= {b,2,4,6,8}



Ejemplo

Dos conjuntos son disjuntos si ***A* ∩ *B = φ***

Es decir, si dos conjuntos *A* y *B* ***no tiene ningún elementos en común***, entonces decimos que dichos conjuntos son disjuntos.

En diagramas de Venn podemos representar:

##### A

##### *B*

##### *B*

*A*

##### C

(A ∪B) ∩ C = φ

Por lo tanto (A ∪B) y son disjuntos

A ∩ B =φ, Por lo tanto *A* y *B* son disjuntos

## Álgebra de conjuntos

Las leyes que rigen el Álgebra de conjuntos don:

1. ***Ley de Idempotencia***



1. ***Leyes Conmutativas***



1. ***Leyes Asociativas***



1. ***Leyes Distributivas***



1. ***Leyes de Absorción***



1. ***Leyes de Morgan***



1. ***Leyes de Complemento***



1. ***Leyes de Identidad***



1. ***Propiedades de la Diferencia***





1. ***Propiedades de al Diferencia Simétrica***



## Particiones (Familias de conjuntos)

Los alumnos de nuestra clase se reparten entres filas.

# K

**I II III**

**• • •**

Designamos por **I** el conjuntos de los alumnos de la primera fila; por **II** el conjunto de los alumnos de la segunda fila; por **III** el conjunto de los alumnos de la tercera fila y por ***K*** el conjunto de los alumnos de nuestra clase.

BD05378_Ninguno de los conjuntos **I ,II, II** es vacío y todo alumno de nuestra clase pertenece a uno y solo uno de los conjuntos **I, II, III**; todo es to se expresa diciendo que el conjunto **{ I, II, III }** es una partición de ***K*** (o familia de ***K***).



# Formalmente

Una partición de un conjunto de A no vacío es una colección de los subconjuntos no vacíos ***A1, A2, A3, ... , An*** de ***A*** tales que:

* 1. A***i*** ∩ A***j*** = φ si *i* ≠ *j* (mutuamente disjuntos)
  2. ***A1 ∪ A2 ∪ A3∪ ...∪ An*** = ***A***

En diagrama de Venn:

A1

A2

A3

A4

## 

## Operaciones generalizadas

BD14752_ Si ***F ={ A1, A2, A3, ... , An}*** es una colección finita de conjuntos la unión de todos los conjuntos de ***F*** se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos de ***F***

***Notación***



BD14752_ Si ***F ={ A1, A2, A3, ... , An}*** es una colección finita de conjuntos la intersección de todos los conjuntos de ***F*** se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a todos los conjuntos d ***F***.

***Notación***



## Producto Cartesiano

Producto cartesiano de dos conjuntos de *A* y *B* es el conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados **(*x ,y*)** tal que el primer componente x pertenece a *A* y el segundo componente a *B*. Se denota por:



# Notación



## TEMA 3

## NÚMEROS ENTERO, INDUCCIÓN Y DIVISIBILIDAD

## Introducción

La teoría de números, al menos originalmente, es la rama de la matemática que estudia las propiedades de los números naturales *1,2,3,...,n* . A poco andar un descubre que este estudio no se confina a dicho conjunto de números, ni siquiera al conjunto de los números enteros, *...-3,-2,-1,0,1,2,3,.,*  sino que muchas veces se debe recurrir a otros conjuntos de números algebraicos, reales, complejos, etc., para resolver asuntos relacionados con los números naturales (y viceversa).

Algunos problemas clásicos de la teoría de números como el llamado teorema de Fermat o el de la distribución de los números primos, han dado origen a grandes desarrollos de la matemática. Es así técnicas de análisis matemático y la teoría de probabilidades. En este tema se estudiarán solo los rudimentos de esta disciplina.

## Principio del Buen Orden y Principio de Inducción Matemática

Comenzamos con los conjuntos de números enteros y de los números naturales (o enteros positivos).



y

 o 

La propiedad más importante de los números naturales es el Principio del Buen Orden.

## Principio del Buen Orden

*“Todo conjunto no vació de números naturales tiene un menor elemento”*

Intuitivamente este sencillo principio nos dice que siempre se puede encontrar lemas pequeño número natural tal que ... , donde la línea de los puntos puede ser llenado por cualquier propiedad (siempre que existe al menos un número natural que verifica dicha propiedad).

## 

## Principio de Inducción Matemática

Antes de enunciar el principio de inducción matemática partimos del siguiente teorema:



Sea S un subconjunto de N que satisface:

1. 1 ∈ S

Hipótesis

1. h ∈ S ⇒ h + 1 ∈ N

entonces S = N

Tesis

Ahora tenemos:

Sea *P(n)* una función proposicional, en la que aparece una o varias veces la variable *n*, que representa a un

entero positivo (*n* ∈ N).

1. Si *P(1)* es verdadero; y
2. Siempre que *P(h)* sea verdadera (para algún *h*∈ Z+ particular pero elegido al azar)

Entonces *P(h+1)* será verdadera

###### Hipótesis

*Tesis*

Entonces *P(h)* es verdadera para todo *n* ∈ Z+

Intuitivamente el Principio de Inducción corresponde al “Principio de Domino”: si cae el primero, cae el siguiente y el que sigue y el que sigue, ..., por lo tanto caen todos.

## Método de Inducción Matemática

El método de inducción matemática, para demostrar una proposición matemática consta, en esencia de los tres primeros pasos:

1. Verificar que la proposición es verdadera para *n = 1* o para el primer valor admisible de *n*
2. Partiendo de la hipótesis de que la proposición es verdadera para algún valor *n*, digamos *h*, demostrar que también es verdadera para *n = h + 1*
3. Comprobado que la proposición es cierta para *n = 1* en el paso 1, del paso 2 se sigue que también es cierta para *n = 2*, entonces es cierta para *n = 3* y así sucesivamente para todos los valores enteros y positivos de *n*

A los pasos 1 y 2 se conocen como la base de la inducción, mientras que el paso 3 se conoce como paso inductivo, o consecuencia de 1 y 2.

## 

## Notación Sumatoria y Productoria

## Sumatoria

Para representar sucesiones de números, se introduce una notación con la cual se encontrará el estudiante frecuentemente en las matemáticas superiores, esta notación es:



significa la suma de todos los términos de la serie cuyo término general sea ese.

Por ejemplo:

La suma de *n* términos tales como:



Puede representarse por ; donde *i* toma sucesivamente todos los valores enteros positivos de 1 a *n* incluso.

Es decir:



Como ejemplo de esta sumatoria tenemos:



Producto

El símbolo que representa el producto de una sucesión de términos en una forma breve es:



Por ejemplo, el producto de ***n*** términos tales como:



**Ejemplo**



Propiedades

1. 

2. , donde *k* es una constante

3. , donde k es una constante

4. , para todo *a*i >0

## Divisibilidad



***Definición***

Si *a, b* ∈ Z y *b* ≠ 0, decimos que *b* divide a *a*, y los denotamos:



Si existe un entero tal que . Cuando esto ocurre, decimos que *b* es un divisor de *a*, o que a es múltiplo de *b*

Si *b* no divide a *a* escribimos:



Si *a, b* y *c* son enteros, entonces:

❶ Si  y  ⇒ 

❷ Si  y  ⇒ , para cualquier par *m, n* ∈ Z

❸ Si  y  ⇒ 

❹ Si  y  ⇒ 

## Número primo

Si seguimos analizando el conjunto Z+, observamos que:

“Un número que no es exactamente divisible por ningún otro excepto por sí mismo y la unidad se llama número primo”.

## Número Compuesto

*“Un número que es divisible por otros números además de sí mismo y la unidad se llama número compuesto”*

**Ejemplos**

53 es primo

35 es compuesto

## Propiedades de números primos

1. Si un número ***a*** divide a un producto ***bc*** y es primo con uno de los factores ***b***, debe dividir al otro factor ***c***.

Por que como a divide a ***bc***, cada divisor de ***a*** lo es de ***bc***; pero como ***a*** es primo con ***b***, ningún divisor de ***a*** lo es de ***b***; por lo tanto, todos los divisores de ***a*** son de ***c***; es decir, ***a*** divide a ***c***.

1. Si ***a*** es primo con cada uno de los números ***b*** y ***c***, también lo es con el producto ***bc***. Por que ningún divisor de ***a*** puede dividir a ***b*** o ***c***; por lo tanto el producto ***bc*** no es divisible por ningún
2. Si un número primo ***a*** divide a un producto ***bcd...***, debe dividir también a uno de los factores de ese producto, y por lo tanto, si un número primo ***a*** divide a ***bn***, en donde ***n*** es un entero positivo cualesquiera, debe dividir también a ***b***.
3. divisor de ***a***, es decir, ***a*** es primo con ***bc***. Recíprocamente si ***a*** es primo con ***bc***, también lo es con
4. cada uno de los números ***b*** y ***c***.

También si ***a*** es primo con cada uno de los números ***b,c,d...***, lo es con su producto ***bcd...***, y recíprocamente si ***a*** es primo con cualquier número, también lo es con cualquier divisor de ese número.

1. Si ***a*** y ***b*** son primos entres sí, toda potencia entera y positiva de ***a*** es primo con toda potencia entera y positiva de ***b***.

##### *Ejemplo*

*Recordando*

Dvidendo a b divisor

(r) q cociente

resto

1. Sea *a* = 350 y *b* = 15 entonces en el algoritmo de la división, tenemos:

*a* = *q b* + *r*

350 = 23\*15 +5

1. Para el caso en que *a* = -50 y *b* = 13 en el algoritmo de la división tenemos que:

- 50 = (-3) \* 13 + (-1)

1. Sean a, b ∈ Z
   1. Si *a* = *qb* para algún *q* ∈ Z+, entonces –*a* = (-*q*) \* *b*. Por lo tanto, en este caso, cuando –*a* (<0) se divide entre *b* (>0) el cociente es –*q* (<0) y el resto es 0
   2. Si *a* = *qb* + *r* para algún *q*∈N y *0< r < b*, entonces –*a* = (-*q*)\**b* – *r*

- 50 = (-3) \* 13 + (-1)

1. Sean a, b ∈ Z
   1. Si *a* = *qb* para algún *q* ∈ Z+, entonces –*a* = (-*q*) \* *b*. Por lo tanto, en este caso, cuando –*a* (<0) se divide entre *b* (>0) el cociente es –*q* (<0) y el resto es 0
   2. Si *a* = *qb* + *r* para algún *q*∈N y *0< r < b*, entonces –*a* = (-*q*)\**b* – *r*

BD07227_

## Algoritmo de la División

BD21350_

***Definición***

Si *a, b* ∈ Z, con b > 0, entonces existen *q, r* ∈Z único tales que *a = qb + r*, con 

El Máximo Común Divisor: El Algoritmo de Euclides

**Ejemplo**

Los divisores comunes de 24 y 32 son 1, 2, 4 y 8, entonces el máximo común divisor es el mayor de los divisores comunes, esto es 8

El máximo común divisor de *a, b* ∈ Z+ existe y es único. Denotamos este número con:



**m. c. d. (a, b)**

## Determinación del m.c.d. por el algoritmo de Euclides

Si *a, b* ∈ Z+, aplicamos el algoritmo de la división como sigue:



Entonces,  es el último resto distinto de cero, es igual a **m.c.d.(*a, b*)**.

Es decir, el máximo común divisor positivo de dos enteros no simultáneamente nulos, es igual al último resto no nulo que se obtiene por la aplicación del algoritmo de Euclides.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| a | b |  |  | ... |  |  |
|  |  |  |  |  | 0 |  |

## TEMA 4

## CONTEO

## Introducción

Las técnicas de conteo son aquellas para enumerar los elementos de un conjunto particular o evento, difíciles de cuantificar.

Por ejemplo: “ el password” de un usuario de un ordenador consiste de ocho (o siete o seis) caracteres. Cada uno de estos caracteres debe ser un dígito decimal o una letra del alfabeto. Cada password debe contener al menos un dígito.

BD05048_

¿Cuántos de éstas claves de acceso diferentes pueden existir?

Los problemas de conteo surgen de las matemáticas y de las ciencias de la computación, pero también de otras muchas disciplinas científicas como la química o de situaciones de la actividad cotidiana en la industria, la gestión, etc. Por ejemplo tendremos que contar los resultados positivos de un experimento y enumerar todos los resultados para determinar probabilidades. También necesitaremos contar el número de operaciones realizadas por un algoritmo para analizar su costo computacional.

## Definición

Se les denomina técnicas de conteo a las combinaciones, permutaciones y diagramas de árbol, éstas nos proporcionan la información de todos las maneras posibles en que ocurre un evento determinado.

Las bases para entender el uso de las técnicas de conteo son el principio multiplicativo y el aditivo.

## Principios Fundamentales del conteo

***Principio de Adición***

Si dos decisiones son mutuamente excluyentes (es decir disjuntos), la primera se puede tomar de ***m*** maneras y la segunda de ***n*** maneras, entonces una o la otra se puede tomar de ***m + n*** maneras.

PE03506_

**Ejemplo**

La biblioteca de la USB tiene 40 libros de Base de Datos y 50 de Matemática Discreta. Por la regla de la suma, un estudiante puede elegir entre 40 + 50 = 90 libros para aprender de alguno de estos libros.

## Principio de Multiplicación

Si un evento puede realizarse de ***n1*** maneras diferentes, y si, continuando el procedimiento, un segundo evento puede realizarse de ***n2*** maneras diferentes, y si, después de efectuado un tercer evento puede realizarse de ***n3*** maneras diferentes, y así sucesivamente, entonces el número de maneras en que los eventos pueden realizarse en el orden indicado es el producto 



Escribe todas las palabras de dos letras (que tengan o no-sentido) que empiecen con consonantes y terminen en vocal.

ba, be, bi, bo, bu

ca, ce, ci, co, cu

da, de, di, do, du

**...**

xa, xe, xi, xo, xu

za, ze, zi, zo, zu



¿Cuántas de estas palabras escribiste?

21 x 5 = 105 palabras de dos letras que empiezan con constantes y terminan en vocal.

***Notación Factorial***

El producto de los enteros positivos desde 1 hasta *n* inclusive, se emplea con mucha frecuencia en matemáticas y aquí lo denotamos por el símbolo  (que se lee “*n* factorial”):



Conviene definir 0! = 1.

## Permutaciones

Una ordenación de un conjunto de ***n*** objetos en un orden dado se llama una permutación de los objetos (tomados todos a la vez). Una ordenación de un número dichos objetos , en un orden dado se llama una permutación *r* o una permutación de los ***n*** objetos tomados ***r*** a la vez.

## Permutaciones simples (n objetos tomados todos a la vez)

El número de permutaciones que pueden formarse con ***n*** objetos distintos está dado por:



los ***n*** objetos tomados todos a la vez

##### Ejemplo

PE02745_

¿Cuántas permutaciones de 3 elementos se forman con 3 objetos *a, b*, y *c*?

*Solución*

Tenemos 3 objetos entonces n = 3

Por lo tanto  permutaciones

En detalle

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Primera Posición** | **Segunda Posición** | **Tercera Posición** |
| a | b | c |
| b | a | c |
| b | c | a |
| c | b | a |
| c | a | b |
| a | c | b |

## Permutaciones Circulares

Son las diferentes permutaciones que pueden formarse con ***n*** objetos dados, de modo que no hay ni primero ni último objeto, pues todos se hallan en un círculo cerrado. Para determinar el número de permutaciones circulares que pueden formarse con los ***n*** objetos distintos de un conjunto, basta observar que considerando fija la posición de cualquiera de los ***n*** objetos, los ***n-1*** restantes podrán cambiar de lugar de ***(n-1)!*** formas diferentes tomando todas las posiciones sobre la circunferencia relativa al primer punto.

Luego:

BD14749_



**Ejemplo**



¿De cuántas formas diferentes pueden sentarse alrededor de una mesa 6 personas?

Si la mesa fuese circular:



## Permutaciones con Repetición

Con frecuencia se desea saber el número de permutaciones de objetos de los cuales algunos son iguales.

##### Teorema

BD21491_El número de permutaciones de ***n*** objetos de los cuales ***n1*** son iguales, ***n2*** son iguales, ..., ***nr***son iguales es:



**Ejemplo**

Supongamos que deseamos formar todas las posibles palabras de 5 letras usando las letras empleadas en la palabra DADDY.

Existen 5 objetos de los cuales el objeto D se repite 3 veces, el objeto A, 1 vez, el objeto Y una vez.

Entonces:

n = 5 

Luego:



Se pueden formar 20 palabras diferentes de 5 letras

## Permutaciones de n Objetos tomados r a la vez

El número de permutaciones de ***n*** objetos tomados ***r*** a al vez lo denotamos por:



Cuya fórmula es:



**Ejemplo**

Hallar el número de permutaciones de 6 objetos, a saber, a, b, c, d, e, f, tomados tres a la vez. En otras palabras, hallar el número de “palabras de tres letras diferentes” que pueden formarse con las seis letras mencionadas.

Representamos las palabras de tres letras por tres cajas:

La primera letra puede escogerse de 6 formas diferentes; luego, la segunda letra se puede escoger de 5 formas diferentes; y después, la última letra se puede escoger de 4 formas diferentes.

5

4

6

 posibles palabras de tres letras sin repetición, o hay 120 permutaciones de 6 objetos tomados 3 a la vez.

Aplicando la fórmula  tenemos:



## Variaciones con repetición

Son arreglos o variaciones de r objetos de n objetos diferentes disponibles, cuando cada objeto puede repetirse una, dos o más veces hasta r en cualquier ordenamiento.

El número de todos los arreglos con repetición de r objetos que pueden formarse a partir de n objetos dado es:



## Combinaciones

Supongamos que tenemos una colección de ***n*** objetos. Una combinación de estos ***n*** objetos tomados de ***r*** a la vez, o una, combinación ***r***, es un subconjunto de ***r*** elementos. En otras palabras, una combinación ***r*** es una selección de ***r*** o de ***n*** objetos donde el orden no se tiene en cuenta.

El número de combinaciones de ***n*** objetos tomados ***r*** a la vez lo denotamos por:



Cuya fórmula es:



**Nota**



**Ejemplo**

Las combinaciones de las letras *a, b, c*, *d* tomados 3 a la vez son:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a | b | c |
| a | c | d |
| a | b | d |
| b | c | d |

Aplicamos la fórmula:



Analizando el siguiente esquema:

|  |  |
| --- | --- |
| **Combinación** | **Permutación** |
| a b c | abc, acb, cab, cba, bca, bac |
| a c d | adc, dac, dca, cda, cad, acd |
| a b d | abd, adb, dab, dba, bda, bad |
| b c d | bcd, bdc, dbc, dcb, cdb, cbd |

## Combinaciones con repetición

Al regresar a casa después de una práctica de carrera en pista, siete estudiantes de bachillerato se detienen en un restaurante de comida rápida, donde cada uno puede comer lo siguiente:

* una hamburguesa con queso
* un hot dog
* un taco
* un sándwich de atún

¿Cuántas compras diferentes son posibles?

Sean *q, h, t* y *p* las hamburguesas con queso, el hot dog, el taco y el sándwich de atún, respectivamente. Aquí nos interesa el número de artículos comprados y no el orden en que son adquiridos, de modo que el problema es de selecciones o combinaciones con repetición.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| q | q | h | h | t | t | p |
| q | q | q | q | h | t | p |
| q | q | q | q | q | q | p |
| h | t | t | p | p | p | p |
| t | t | t | t | t | p | p |
| t | t | t | t | t | t | t |
| p | p | p | p | p | p | p |

El número de combinaciones de ***r*** objetos tomados de los ***n*** objetos dados, de manera que estos objetos pueden repetirse, está dado por:



**Ejemplo**

Una pastelería ofrece cinco tipos distintos de pasteles. Si se supone que hay al menos una docena de cada tipo, al entrar en al pastelería, ¿de cuántas formas se podrá seleccionar una docena de pasteles?

*Solución*

De los cinco tipos de pasteles se pueden elegir una docena, puesto que cada tipo tiene al menos una docena entonces:

n = 5 tipos

r = 12 selecciones



## Binomio de Newton

Si *a* y *b* son números reales diferentes de cero, se puede establecer que:



Los coeficientes en este producto siguen una regla que es mostrada en e siguiente esquema, conocida como el ***triángulo de pascal***.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  | 1 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 1 |  | 1 |  |  |  |  |
|  |  |  | 1 |  | 2 |  | 1 |  |  |  |
|  |  | 1 |  | 3 |  | 3 |  | 1 |  |  |
|  | 1 |  | 4 |  | 6 |  | 4 |  | 1 |  |
| 1 |  | 5 |  | 10 |  | 10 |  | 5 |  | 1 |
| **..................** | | | | | | | | | | | |

Expresando en una fórmula a partir de:

Sea el símbolo , léase “n C r” (coeficiente combinatoria), donde ***r*** y ***n*** son enteros positivos , se define como sigue:



La conexión entre estos símbolos entre estos símbolos y los coeficientes de las expresiones  se ve claramente del hecho que el triángulo de pascal puede escribirse ahora así:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **..................** | | | | | | | | | | | |



A esta expresión se le denomina el teorema del binomio.

Donde:

 donde r = 0,1,2,...,n

## Propiedades

1. Es un polinomio entero, ya que sus coeficientes son enteros por ser números combinatorios.
2. Es un polinomio homogéneo del grado ***n*** respecto de las letras ***a*** y ***b***
3. es un polinomio completo de ***n +1*** términos, ya que los exponentes de a van disminuyendo sucesivamente desde ***n*** a 0
4. Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales, lo cual es evidente por ser números combinatorios de grados complementarios.
5. El exponente de ***a*** en cada término es igual al número de términos que le siguen, y el de ***b*** al de los que le preceden
6. Los términos centrales en el desarrollo de un binomio , son:



## Consecuencias Prácticas

1. Si los términos del binomio tienen signos contrarios, los términos del desarrollo serán alternativamente positivos y negativos, siendo negativos los que contengan potencias impares del término negativo del binomio. Basta sustituir en el desarrollo ***a*** por ***–a***
2. Si los dos términos del binomio son negativos, todos los términos del desarrollo serán positivos o negativos, según que el exponente sea par o impar. Se tiene en efecto.



## TEMA 5

## NUMEROS COMPLEJOS

## Introducción

# Número complejo, expresión de la forma a + bi, en donde a y b son números reales e i es √-1. Estos números se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir, y forman una estructura algebraica de las llamadas cuerpo en matemáticas. En física e ingeniería los números complejos se utilizan para describir circuitos eléctricos y ondas electromagnéticas. El número i aparece explícitamente en la ecuación de onda de Schrödinger que es fundamental en la teoría cuántica del átomo. El análisis complejo, que combina los números complejos y los conceptos del cálculo, se ha aplicado a campos tan diversos como la teoría de números o el diseño de alas de avión.

Los números complejos son una extensión de los [números reales](http://es.wikipedia.org/wiki/NÃºmero_real), cumpliéndose **que \mathbb{R}\sub\mathbb{C}. Los** números complejos representan todas las [raíces](http://es.wikipedia.org/wiki/RaÃ­z_(matemÃ¡tica)) de los [polinomios](http://es.wikipedia.org/wiki/Polinomio), a diferencia de los reales.

Los números complejos son la herramienta de trabajo del álgebra ordinaria, llamada álgebra de los números complejos, así como de ramas de las matemáticas puras y aplicadas como variable compleja, aerodinámica y electromagnetismo entre otras de gran importancia.

Contienen a los números reales y los imaginarios puros y constituyen una de las construcciones teóricas más dignas de la inteligencia humana. Los análogos del [cálculo diferencial](http://es.wikipedia.org/wiki/CÃ¡lculo_diferencial) e [integral](http://es.wikipedia.org/wiki/Integral) con números complejos reciben el nombre de [variable compleja](http://es.wikipedia.org/wiki/Variable_compleja) **o análisis complejo.**

# Historia

# Los números complejos aparecieron al buscar soluciones para ecuaciones como x2 = -1. No existe ningún número real x cuyo cuadrado sea -1, por lo que los matemáticos de la antigüedad concluyeron que no tenía solución. Sin embargo, a mediados del siglo XVI, el filósofo y matemático italiano Gerolamo Cardano y sus contemporáneos comenzaron a experimentar con soluciones de ecuaciones que incluían las raíces cuadradas de números negativos. Por ejemplo, Cardano sugirió que el número real 40 se puede expresar como

# 

# C:\Documents and Settings\Mi PC\Configuración local\Archivos temporales de Internet\T062580A.bmp

# El matemático suizo Leonhard Euler introdujo el moderno símbolo i para √-1 en 1777 y formuló la expresión

# 

*eni = -1*

Que relaciona cuatro de los números más importantes en matemáticas. El matemático alemán Carl F. Gauss, en su tesis doctoral de 1799, demostró su famoso teorema fundamental del álgebra, que dice que todo polinomio con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja. En 1825, continuando con el estudio de las funciones complejas, el matemático francés Augustin L. Cauchy generalizó el concepto de integrales definidas de funciones reales para funciones de variable compleja.

## Propiedades

En un número complejo a + bi, a se conoce como la parte real y b como la parte imaginaria. El número complejo -2 + 3i tiene parte real -2 y parte imaginaria 3. La adición de números complejos se realiza sumando las partes reales e imaginarias por separado. Por ejemplo, para sumar 1 + 4i y 2 - 2i se suman las partes reales 1 y 2, y a continuación las partes imaginarias 4 y -2, dando el número complejo 3 + 2i. La regla general para la adición es

(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i

La multiplicación de números complejos se basa en que i · i = -1, y en asumir que esta operación es distributiva respecto de la adición. Esto genera la siguiente regla para la multiplicación:

(a + bi)·(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i

Utilizando esta regla se tiene, por ejemplo, que

(1 + 4i)·(2 - 2i) = 10 + 6i

Si z = a + bi es un número complejo cualquiera, el complejo conjugado de z es

# T062579A

y el valor absoluto o módulo de z es

# 

# T062581A

Así, el conjugado de 1 + 4i es 1 - 4i y su módulo es

# 

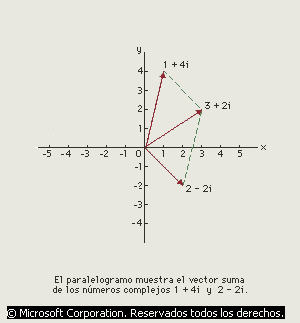
√(12+42) = √17

Una relación fundamental entre el valor absoluto y el complejo conjugado es que

# 

Z∙Z‾=Z

# El Plano Complejo



# Figura 1: suma de dos números complejos

# De la misma manera que los números reales se pueden representar como puntos de una línea, los números complejos se pueden representar como puntos de un plano. El número complejo a + bi es aquel punto del plano con coordenada x igual a la parte real a, y coordenada y igual a la parte imaginaria b. Los complejos 1 + 4i y 2 - 2i aparecen en la figura 1 y corresponden a los puntos (1,4) y (2,-2) del plano. En 1806, el matemático francés Jean-Robert Argand representó geométricamente los números complejos como puntos del plano, por lo que la figura 1 es conocida como diagrama de Argand. Si un número complejo se considera como un vector que une el origen y el punto correspondiente, la adición de números complejos es igual a la suma corriente de vectores. La figura 1 muestra el número complejo 3 + 2i obtenido al sumar los vectores 1 + 4i y 2 - 2i.

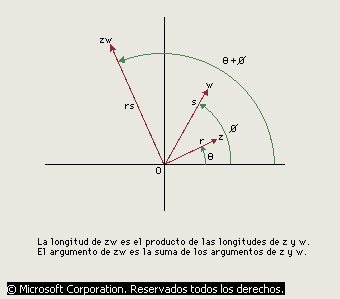


Figura 2: producto de dos números complejos

Dado que los puntos del plano se pueden definir en función de sus coordenadas polares *r* y *θ* (véase Sistema de coordenadas), todo número complejo z se puede escribir de la forma

*z = r (cos θ + i sen θ*

Donde *r* es el módulo de *z* o distancia del punto al origen y *θ* es el argumento de *z* o ángulo entre *z* y el eje de las *x*. Si *z = r (cos θ + i sen θ)* y *w = s (cos φ + i sen φ)* son dos números complejos en forma polar, entonces el producto (en forma polar) viene dado **por**

# zw = rs (cos(θ + φ) + isen(θ + φ))

# Este cálculo tiene una sencilla interpretación geométrica que se muestra en la figura 2.

# Soluciones Complejas

Existen muchas ecuaciones polinómicas (ver Teoría de ecuaciones) que no tienen soluciones reales, como

x2 + 1 = 0

Sin embargo, si se permite que x sea compleja, la ecuación tiene como soluciones x = ±i, donde i y -i son las raíces del polinomio x2 + 1. La ecuación

x2 - 2x + 2 = 0

tiene como soluciones x = 1 ± i. El gran logro de Gauss fue demostrar que todo polinomio no trivial (es decir, que tiene al menos una raíz distinta de cero) con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja. De aquí se deduce que todo polinomio complejo de grado n tiene exactamente n raíces, no necesariamente distintas. Por tanto, todo polinomio complejo de grado n se puede escribir como producto de n factores lineales complejos.

# Definición

* Suma

(a, b) + (c, d) = (a+c) +\; (b+d)i

* Multiplicación

(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd) +\; (ad + cb)i 

* Igualdad

(a, b) = (c, d) \iff a = c \and b = d

A la primera componente (*a*) se le llama parte real y a la segunda (*b*), parte imaginaria. Si un número tiene sólo parte imaginaria se dice que es imaginario puro.

Tal como los hemos definido, los números complejos forman un [cuerpo](http://es.wikipedia.org/wiki/Cuerpo_(matemÃ¡tica)), el cuerpo complejo, denotado por C (o más apropiadamente por el carácter [unicode](http://es.wikipedia.org/wiki/Unicode) ℂ ). Si identificamos el número real *a* con el complejo (*a*, 0), el cuerpo de los números reales R aparece como un subcuerpo de C. Más aún, C forma un [espacio vectorial](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_vectorial) de dimensión 2 sobre los reales. Los complejos no pueden ser ordenados como, por ejemplo, los [números reales](http://es.wikipedia.org/wiki/NÃºmeros_reales): C no puede ser convertido de ninguna manera en un cuerpo [ordenado](http://es.wikipedia.org/wiki/TeorÃ­a_del_orden).

# Unidad Imaginaria

Tomando en cuenta que (a, 0) \cdot (0, 1) = (0, a), se define un número especial en matemáticas de gran importancia, el número *i* o unidad imaginaria, definido como

i = (0,1)

Luego,

\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 

# Representación Binomial

Cada complejo se representa en forma binomial como:

*z* = *a* + i*b*

*a* es la parte real del número complejo *z*, y *b* es su parte imaginaria. Esto se expresa así:

a = \Re(z)

b = \Im(z)

## PLANO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Desde un punto de vista geométrico la [recta real](http://es.wikipedia.org/wiki/Recta_real) (recta que representa el total de números reales) puede ser vista como un [subconjunto](http://es.wikipedia.org/wiki/Subconjunto) del plano de los números complejos.

Cada número complejo sería un punto en ese plano. En la parte horizontal o eje real, se colocan los números reales; en el eje vertical o eje imaginario, van los números imaginarios puros.

Dado que cada número complejo consta de una parte real y una imaginaria, puede representarse geométricamente cada número complejo por sus coordenadas en el plano complejo, similarmente al plano de coordenadas cartesianas.

## Valor Absoluto ó módulo, Conjugado Y Distancia

***Valor Absoluto O Módulo De Un Número Complejo***

El [valor absoluto](http://es.wikipedia.org/wiki/Valor_absoluto), módulo o magnitud de un número complejo z viene dado por la siguiente expresión:

|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}

Si pensamos en *z* como algun punto en el plano; podemos ver, por el [teorema de Pitágoras](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_PitÃ¡goras), que el valor absoluto de un número complejo coincide con la [distancia euclídea](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Distancia_eucl%C3%ADdea&action=edit) desde el origen del plano.

Si el complejo está escrito en forma exponencial *z* = *r e*iφ, entonces |*z*| = *r*. Se puede expresar en forma polar como *z* = *r(cosφ + isenφ)*, donde cosφ + isenφ = *e*iφ es la conocida fórmula de Euler.

Podemos comprobar con facilidad estas cuatro importantes propiedades del valor absoluto

|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0

**\left| z + w \right| \leq |z| + |w|**

**\left| zw \right| = |z||w|**

**\left | z - w\right| \ge ||z| - |w||**

para cualquier complejo *z* y *w*.

Por definición, la función distancia queda como sigue *d*(*z*, *w*) = |*z* - *w*| y nos provee de un [espacio métrico](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_mÃ©trico) con los complejos gracias al que se puede hablar de [límites](http://es.wikipedia.org/wiki/LÃ­mite_matemÃ¡tico) y [continuidad](http://es.wikipedia.org/wiki/Continuidad). La suma, la resta, la multiplicación y la división de complejos son operaciones continuas. Si no se dice lo contrario, se asume que ésta es la métrica usada en los números complejos.

## Conjugado de un número complejo

Dos binomios se llaman conjugados si solo difieren en su signo central, por ejemplo, los dos binomios: 3m - 1 y 3m + 1 son conjugados.

El *conjugado* de un complejo *z* (denotado como \bar{z}ó z^* \,\!) es un nuevo número complejo, definido así:

\bar{z} = a - \mathrm{i}b  \Longleftrightarrow  z = a + \mathrm{i}b

Se observa que ambos difieren en el signo de la parte imaginaria**.**

Con este número se cumplen las propiedades:

**\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}**

**\overline{z} + z  = 2\cdot\Re(z)**

**\overline{z} - z  = -2\cdot\Im(z)**

**\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}**

**z \in \mathbb{R}  \Longleftrightarrow  \bar{z} = z**

**|z|^2 = z\bar{z}**

**z \neq 0  \Longrightarrow  \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}**

Esta última fórmula es el método elegido para calcular el inverso de un número complejo si viene dado en coordenadas rectangulares.

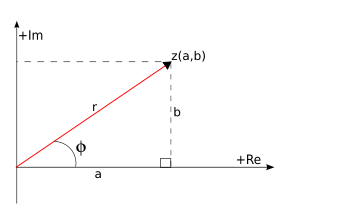
## Representación Trigonometrica Y Representación Geométrica

Algunas veces, la representación de números complejos en la forma *z* = *a* + *i b* ("coordenadas rectangulares") es menos conveniente que otra representación, usando [coordenadas polares](http://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_polares).

Representamos el número complejo *z* en el plano de números complejos como un punto con coordenadas (a, b), denominado *vector de posición*.

Trazamos la distancia desde el punto (0,0) hasta (a, b), a la que llamaremos *r*, y, que como se ha visto antes, es igual al módulo de *z*, expresado | *z* | .

Esta distancia forma, con respecto al eje real positivo, un ángulo, denominado φ.

[](http://es.wikipedia.org/wiki/Imagen:Complejog1.png)

La representación polar nos permite expresar este número complejo en función de *r* y del ángulo φ:

*z* = *re*i(φ + 2π*k*)

# Módulo y Argumento

En esta representación, \textstyle{r}es el módulo del número complejo y el ángulo \textstyle{\phi}es el argumento del número complejo.

\textstyle{\phi} = \arctan \left(\frac{b}{a}\right) = \arctan \left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\right)

Formamos un triángulo rectángulo, con *r* como hipotenusa, y con catetos *a* y *b*. Vemos que:

**\sin \phi = \frac{b}{r}**

**\cos \phi = \frac{a}{r}**

Despejamos *a* y *b* en las expresiones anteriores y, utilizando la representación binomial:

z = a + \mathrm{i}b ;\; z = r\cos{\phi} + \mathrm{i}r\sin{\phi}

Sacamos factor común *r*:

z = r \left( \cos{\phi} + \mathrm{i}\sin{\phi} \right) 

(Frecuentemente, esta expresión se abrevia de la siguiente manera: *z* = *rcis*φ)

Según esta expresión, puede observarse que para definir un número complejo tanto de esta forma como con la representación binomial se requieren dos parámetros, que pueden ser parte real e imaginaria o bien módulo y argumento, respectivamente.

Según la [Fórmula](http://es.wikipedia.org/wiki/FÃ³rmula_de_Euler) de Euler, vemos que:

**\cos{\phi} + \mathrm{i}\sin{\phi} = e^{\mathrm{i}\phi} ;\; z = r e^{i\phi}**

No obstante, el ángulo φ no está unívocamente determinado por *z*, como implica la fórmula de Euler:

\forall{k}{\in}\mathbb{Z}\; z = e^{\mathrm{i}(\phi + 2\pi{}k)}

Por esto, generalmente restringimos φ al [intervalo](http://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo) [-π, π] y a éste φ restringido lo llamamos *argumento principal* de *z* y escribimos φ = arg(*z*). Con este convenio, las coordenadas estarían unívocamente determinadas por *z*.

La multiplicación de números complejos es especialmente sencilla con la notación polar:

z_1 z_2 = rse^{\mathrm{i}(\phi + \psi)} \Leftrightarrow z_1 z_2 = r e^{\mathrm{i}\phi} s e^{\mathrm{i}\psi} 

División:

**\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s} e^{\mathrm{i}(\phi - \psi)}**

**Potenciación:**

**z^n = r^n e^{\mathrm{i} \phi n} \Leftrightarrow z^n = \left( r e^{i\phi} \right)^{n}**

***Geometria Y Operaciones Con Complejos***

Geométricamente, las operaciones algebraicas con complejos las podemos entender como sigue. Para sumar dos complejos *z*1 =*a*1 + *ib*1 y *z*2 = *a*2 + *ib*2, podemos pensar en ello como la suma de dos vectores del plano *x*-*y* apuntando desde el origen al punto (*a*1, *b*1) y (*a*2,*b*2), respectivamente. Si trasladamos (movemos) el segundo vector, sin cambiar su dirección, con lo que su punto de aplicación coincide con el punto final del primer vector; el segundo vector así ubicado apuntará al complejo *z*1 + *z*2.

Siguiendo con esta idea, para multiplicar dos complejos *z*1 y *z*2, primero medimos el ángulo que forman en sentido contrario a las agujas del reloj con el eje positivo de las *x* y sumamos ambos ángulos: el ángulo resultante corresponde con el del vector que representa al complejo producto *z*1 · *z*2. La longitud de este vector producto viene dada por la multiplicación de las longitudes de los vectores originales. La multiplicación por un número complejo fijo puede ser vista como la una transformación del vector que rota y cambia su tamaño simultáneamente.

Multiplicar cualquier complejo por *i* corresponde con una rotación de 90º en dirección contraria a las agujas del reloj. Asimismo el que (-1) · (-1) = +1 puede ser entendido geométricamente como la combinación de dos rotaciones de 180º, dando como resultado una vuelta completa.

## Soluciones De Ecuaciones Polinomicas

Una *raíz* del [polinomio](http://es.wikipedia.org/wiki/Polinomio) *p* es un complejo *z* tal que *p*(*z*)=0. Un resultado importante de esta definición es que todos los polinomios de grado *n* tienen exactamente *n* soluciones en el *campo complejo*, esto es, tiene exactamente *n* complejos *z* que cumplen la igualdad *p*(*z*)=0, contados con sus respectivas multiplicidades. A esto se lo conoce como [Teorema Fundamental del Álgebra](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_Fundamental_del_Ãlgebra), y demuestra que los complejos son un [cuerpo algebraicamente cerrado](http://es.wikipedia.org/wiki/Cuerpo_algebraicamente_cerrado). Por esto los matemáticos consideran a los números complejos unos números más *naturales* que los números reales a la hora de resolver ecuaciones.

## Variable Compleja O Analisis Complejo

Al estudio de las [funciones](http://es.wikipedia.org/wiki/FunciÃ³n_(matemÃ¡tica)) de variable compleja se lo conoce como el [Análisis complejo](http://es.wikipedia.org/wiki/AnÃ¡lisis_complejo). Tiene una gran cantidad de usos como herramienta de [matemáticas aplicadas](http://es.wikipedia.org/wiki/MatemÃ¡tica_aplicada) así como en otras ramas de las matemáticas. El análisis complejo provee algunas importantes herramientas para la demostración de teoremas incluso en [teoría de números](http://es.wikipedia.org/wiki/TeorÃ­a_de_nÃºmeros); mientras que las funciones reales de variable real, necesitan de un plano cartesiano para ser representadas; las funciones de variable compleja necesitan un espacio de cuatro dimensiones, lo que las hace especialmente difíciles de representar. Se suelen utilizar ilustraciones coloreadas en un espacio de tres dimensiones para sugerir la cuarta coordenada o animaciones en [3D](http://es.wikipedia.org/wiki/GrÃ¡ficos_3D_por_computadora) para representar las cuatro dimensiones.

***Esbozo Historico***

La primera referencia conocida a raíces cuadradas de números negativos proviene del trabajo de los matemáticos griegos, como [Herón de Alejandría](http://es.wikipedia.org/wiki/HerÃ³n_de_AlejandrÃ­a) en el [siglo I](http://es.wikipedia.org/wiki/Siglo_I) antes de Cristo, como resultado de una imposible sección de una [pirámide](http://es.wikipedia.org/wiki/PirÃ¡mide). Los complejos se hicieron más patentes en el [Siglo XVI](http://es.wikipedia.org/wiki/Siglo_XVI), cuando la búsqueda de fórmulas que dieran las raíces exactas de los polinomios de grados 2 y 3 fueron encontradas por matemáticos italianos como [Tartaglia](http://es.wikipedia.org/wiki/Tartaglia), [Cardano](http://es.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardano). Aunque sólo estaban interesados en las raíces reales de este tipo de ecuaciones, se encontraban con la necesidad de lidiar con raíces de números negativos. El término imaginario para estas cantidades fue acuñado por [Descartes](http://es.wikipedia.org/wiki/RenÃ©_Descartes) en el [Siglo XVII](http://es.wikipedia.org/wiki/Siglo_XVII) y está en desuso. La existencia de números complejos no fue completamente aceptada hasta la más abajo mencionada interpretación geométrica que fue descrita por Wessel en [1799](http://es.wikipedia.org/wiki/1799), redescubierta algunos años después y popularizada por [Gauss](http://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss). La implementación más formal, con pares de números reales fue dada en el [Siglo XIX](http://es.wikipedia.org/wiki/Siglo_XIX).

## Aplicaciones

Los números complejos se usan en[*ingeniería electrónica*](http://es.wikipedia.org/wiki/IngenierÃ­a_electrÃ³nica) y en otros campos para una descripción adecuada de las señales periódicas variables. En una expresión del tipo *z* = *r ei*φ podemos pensar en *r* como la [*amplitud*](http://es.wikipedia.org/wiki/Amplitud_(matemÃ¡tica)) y en φ como la fase de una [*onda sinusoidal*](http://es.wikipedia.org/wiki/Onda_sinusoidal) de una [*frecuencia*](http://es.wikipedia.org/wiki/Frecuencia) dada. Cuando representamos una corriente o un voltaje de corriente alterna (y por tanto con comportamiento sinusoidal) como la parte real de una función de variable compleja de la forma: *f*(*t*) = *z* *eiωt* donde ω representa la [*frecuencia angular*](http://es.wikipedia.org/wiki/Frecuencia_angular) y el número complejo *z* nos da la fase y la amplitud, el tratamiento de todas las fórmulas que rigen las [*resistencias*](http://es.wikipedia.org/wiki/Resistencia_elÃ©ctrica), [*capacidades*](http://es.wikipedia.org/wiki/Condensador_(elÃ©ctrico)) e [*inductores*](http://es.wikipedia.org/wiki/Inductor) pueden ser unificadas introduciendo resistencias imaginarias para las dos últimas. Ingenieros eléctricos y físicos usan la letra *j* para la unidad imaginaria en vez de *i* que está típicamente destinada a la intensidad de corriente.

El campo complejo es igualmente importante en [*mecánica cuántica*](http://es.wikipedia.org/wiki/MecÃ¡nica_cuÃ¡ntica) cuya matemática subyacente utiliza [*Espacios de Hilbert*](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_de_Hilbert) de dimensión infinita sobre C (ℂ).

En la [*relatividad especial*](http://es.wikipedia.org/wiki/Relatividad_especial) y la [*relatividad general*](http://es.wikipedia.org/wiki/Relatividad_general), algunas fórmulas para la métrica del [*espacio-tiempo*](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio-tiempo) son mucho más simples si tomamos el tiempo como una variable imaginaria.

En [*ecuaciones diferenciales*](http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_diferenciales), es habitual encontrar primero las raíces complejas *r* de la [*ecuación característica*](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Ecuaci%C3%B3n_caracter%C3%ADstica&action=edit) de la [*ecuación diferencial de primer grado*](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Ecuaci%C3%B3n_diferencial_de_primer_grado&action=edit) y luego intentar resolver el sistema en términos de las funciones base de la forma: *f*(*t*) = *ert*.

Los [*fractales*](http://es.wikipedia.org/wiki/Fractales) son diseños artísticos de infinita complejidad. En su versión original, se los define a través de cálculos con números complejos en el plano.

## REPRESENTACIONES ALTERNATIVAS DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Otras representaciones, no tan frecuentes, de los números complejos, pueden darnos otra perspectiva de su naturaleza. La siguiente es una interpretación donde cada complejo se representa matricialmente, como una matriz de orden 2x2 con [*números reales*](http://es.wikipedia.org/wiki/NÃºmero_real) como entradas que estiran y rotan los puntos del plano. Cada una de estas matrices tiene la forma

\begin{pmatrix}
a & -b \\
b & a \\
\end{pmatrix}

Con números *reales* *a* y *b*. La suma y el producto de dos matrices queda de nuevo de esta forma. Cualquier matriz no nula de esta forma es invertible, y su inverso es de nuevo de esta forma. Por consiguiente, las matrices de esta forma son un cuerpo. En efecto, este es exactamente el cuerpo de los complejos. Cualquier matriz puede ser escrita:


\begin{pmatrix}
a & -b \\
b & a \\
\end{pmatrix} = a \cdot
\begin{pmatrix}
1 & 0 \\
0 & 1 \\
\end{pmatrix} + b \cdot
\begin{pmatrix}
0 & -1 \\
1 & 0 \\
\end{pmatrix}


Lo cual sugiere que se puede identificar la unidad con la matriz


\begin{pmatrix}
1 & 0 \\
0 & 1 \\
\end{pmatrix}


y la unidad imaginaria


\begin{pmatrix}
0 & -1 \\
1 & 0 \\
\end{pmatrix}


esto es, una rotación de 90 grados. ¡Nos damos cuenta de que el cuadrado de esta matriz es ciertamente igual a -1!

El valor absoluto de un complejo expresado como una matriz es igual a la[*raíz cuadrada*](http://es.wikipedia.org/wiki/RaÃ­z_cuadrada) del [*determinante*](http://es.wikipedia.org/wiki/Determinante) de la matriz. Si vemos la matriz como una transformación del plano, entonces la transformación rota puntos con un ángulo igual al argumento del complejo y escala multiplicando por un factor igual al valor absoluto del complejo. El complejo conjugado de *z* es la transformación con la misma rotación dispuesta por *z* pero en sentido inverso, y escala de la misma manera que *z*; esto puede ser descrito por la traspuesta de la matriz correspondiente a *z*.

## TEMA 6

## RELACIONES

## 3.1 Relaciones de A en B

Designamos por A y B dos conjuntos:

***A*** conjunto de vendedores

***B*** conjunto de productos

Pedimos a cada vendedor elementos del conjunto *A* que venda productos del conjunto *B*.

Se dice que la relación definida es una relación de *A* en *B*

Representémosla por un gráfico, teniendo en cuenta los diversos casos posibles.

Los conjuntos *A* y *B* son disjuntos.



Los conjuntos *A* y *B* son disjuntos y todo vendedor *A* vende todo producto de *B*

Esta vez, de todo punto de *A* parte una flecha a cada uno de los puntos de *B*

FD01247_

x

c



FD00662_BD07128_

y

b

t

a

PE04015_BD08874_FD01095_

z

*A* X *B*

Se tiene pues,



El producto *A x B* es el conjunto de los pares ordenados *(a ,b)* tales que:







Luego se tiene *P(a ,b)* una propiedad relativa a los elementos , en es orden. *P(a ,b)* es una proposición verdadera. De este modo queda definido un subconjunto



llamado relación.

En el ejemplo anterior la propiedad *P(a,b)* que vincula al conjunto *A* con *B* es:

***P(a, b)*:** ***a*** vende producto ***b***

Para indicar que un par ordenado *(a, b)* pertenece a la relación se escribe:





* ***a* R *b***
* ***(a, b)* ∈ *R***

***Representación en gráfico cartesiano***

Del ejemplo anterior (Vendedores y Productos) se tiene:

a b c

z

y

x

t

●

●

●

●

dsfaadfA

***B***

***A***

## 3.2 Dominio, Imagen. Relación Inversa

Consideremos una relación R entre los conjuntos de A y B. Si (a, b ) ∈ R diremos que *b* es una imagen de *a* través de R, y que *a* es un antecedente o preimagen de *b* por R

Dominio de R es la totalidad de los elementos de A, que admite imagen en B.

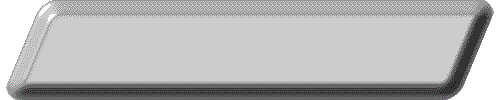
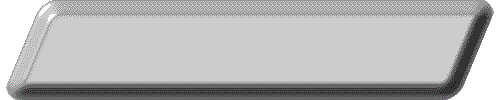




Imagen de R es el conjunto de los elementos de B, que admite un antecedente en A.





Sean los conjuntos  y .

Se define la siguiente relación R (divisor) de *A* en *B*:



Esto es:



Entonces:

BD07889_

##### Ejemplo

1•

5•

3•

7•

•2

9•

•4

•8

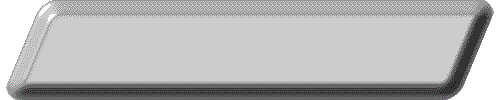
•6

**DR**

**B = IR**

##### A

Relación inversa de R es el subconjunto de B Χ A definido por:





Sean los conjuntos  y 

Se define mediante



Luego



La relación inversa es:



En diagrama de Venn se tiene:



Representación gráfica cartesiana:





## 3.3 Composición de relaciones





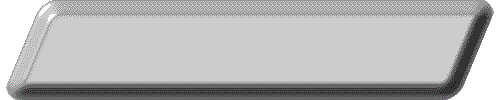
Sea R una relación de A en B, y S una relación de B en C.

Es decir:

y



La relación S ○ R se llama compuesta (composición) de las relaciones A y B. Definimos:





Así, la relación S ○ R asocia a un elemento de DR con uno de IS.

**C**

**B**

**S**

##### R

**A**

c

∙

b

∙

a

∙

##### S ○ R

# Propiedades de la Composición

Sean R , S y T relaciones entre conjuntos que admiten las siguientes propiedades:



WB02287_



donde:



\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_



# Relaciones definidas en un conjunto

Sea R una relación de A en B. Si A y B son iguales, se dice que  es una relación definida en A. En adelante nos limitaremos a esto.

## Propiedades de las relaciones

La matemática y muchas otras ciencias hacen uso constante de las relaciones.

Por eso es importante esbozar una especie de clasificación y poner en evidencia ciertas clases de relaciones que tienen importantes propiedades comunes.

Una relación se llama reflexiva si y solamente si, su gráfico presenta un lazo en cada uno de sus puntos.

|  |
| --- |
| **REFLEXIVIDAD** |
| En todo punto del gráfico.    ● |

*Formalmente:*

WB02287_



Sea:



1●

3●

5●

4●

2●

# Relaciones no reflexivas

Se dice que una relación R en un conjunto A es no reflexiva si existe algún elemento que no está relacionado consigo mismo. Es decir

WB02287_



Sea:



Y sea:



R no es reflexiva por que 3 elementos de A no están relacionados consigo mismo: Es decir:



a●

i●

o●

u●

e●

# Antirreflexiva

Una relación se llama antirreflexiva si y solo sí su grafico no presenta ningún lazo.

|  |
| --- |
| **ANTIREFLEXIVIDAD** |
| **¡ningún lazo!**  ● |

*Formalmente:*



Sea:



Y sea:



##### A

Ningún elemento de A está relacionado consigo mismo

5●

3●

1●

●7

Una relación es simétrica si cada vez que sus gráfico presente una flecha que va de *x* a *y*, presenta también una que va de *y* a *x*.

|  |
| --- |
| **SIMÉTRICA** |
| **En todo par de puntos**  ●  ● |

*Formalmente:*



Sea:





Y sea *R* ama

Romeo

Julieta

●

●

Una relación es, pues, simétrica si y solamente sí, es igual a su recíproca.



Sea



Y sea



**M**

5

10

15

20

●

●

●

●



Observe que:



# Relaciones no simétricas

Una relación *R*, definida en un conjunto A es no simétrica si existe algún par *(x, y)* en la relación, pero su transpuesta *(y, x)* no pertenece a ella.

*Formalmente:*



# Relaciones Asimétricas

Una relación *R* en un conjunto *A* es asimétrica si un par *(x, y)* pertenece a la relación, entonces su transpuesta *(y, x)* no pertenece a ella.

*Formalmente:*



Sea:



Y sea





**K**

a

k

j

q

●

●

●

●



Una relación es transitiva

Si y solo sí

Su gráfico satisface la condición

Una flecha va de *x* a *y*

y

Una flecha va de *y* a *z*

Si

Entonces una flecha va de *x* a *z*

Y esto cualquiera que sean los puntos *x, y ,z* diferentes o no.

|  |
| --- |
| **TRANSITIVA** |
| **Si cada una de las letras x, y, z designa un punto del gráfico**  si  *z*  *y*  ●  ●  entonces  si  *x*  ● |

*Formalmente:*



Sea



Y sea



P

6



8

●

2

●

# Relaciones no transitivas

●

4

●

Una relación R en un conjunto A se dice que es no transitiva si existen pares *(x, y)* y *(y, z)* que pertenecen a R pero el par *(x, z)* no pertenece a ella.

*Formalmente****:***



Sea



Y sea



A

b



●

a

●

●c

c

d

●



# Relaciones atransitivas

Una relación R en un conjunto A se llama atransitiva si, cualquiera que sean los pares (x, y) y (y, z) que pertenecen a la relación, entonces el par (x, z) no pertenece a ella. Es decir:



Sea



Y sea



Entonces R es una relación atransitiva, ya que:



Una relación es antisimétrica si y solo sí su gráfico no presenta jamás simultáneamente una flecha que vaya de *a* a *b*, , y una flecha que vaya de *b* a *a*.

|  |
| --- |
| **ANTISIMÉTRICA** |
| **Ninguna ida y vuelta**    b  ●  a  ● |

*Formalmente:*



Sea



Y sea



Entonces R es una relación antisimétrica ya que se verifica.

Todas las proposiciones son verdaderas; entonces R es antisimétrica

10 R 15 ∧ 15 R 10 ⇒ 10 = 15

⇓ ⇓ ⇒ ⇓

V F F

⇓

F ⇒ F

V

15 R 15 ∧ 15 R 15 ⇒ 15 = 15

⇓ ⇓ ⇒ ⇓

V V V

⇓

V ⇒ V

V

25 R 10 ∧ 10 R 25 ⇒ 25 = 10

⇓ ⇓ ⇒ ⇓

V F F

⇓

F ⇒ F

V

20 R 25 ∧ 25 R 20 ⇒ 20 = 25

⇓ ⇓ ⇒ ⇓

V F F

⇓

F ⇒ F

V

M

10

●

15

●

●

25

20

●

Una relación es a la vez simétrica y antisimétrica si y solo sí su gráfico presenta solamente lazos.

A

●

●

●

●

●

●

●

●

●

●

●

●

●

## 

## Clases de Equivalencia

BD07208_

Pedro está en silencio, trabaja con su colección de estampillas. Pequeñas pilas anidadas se van levantando poco a poco. La tarea ha llegado a su término; ¡las estampillas están clasificadas por país!. Así es como Pedro aprende a conocer mejor su querida colección.

Pero Pedro también clasifica sus estampillas por color, por valor, impreso, etc.

Los hombres actúan frente a las situaciones más diversas como Pedro frente a sus estampillas; para conocer, retener,..., clasificar.

Clasificamos nuestras palabras en sustantivos, adjetivos, verbos, adverbios, pronombres, conjunción, proposiciones, artículos.

Clasificamos los animales en vertebrados e invertebrados.

Clasificar un conjunto E es dar una participación P del conjunto E.

j0078622

*¿Quieres recordar la definición de partición?*

* Se llama partición del conjunto E, todo conjunto P de partes no vacías de E tal que todo elemento de E pertenece a uno, y solo uno, conjunto – elemento de P.
* Los elementos de P se llaman clases de la partición.

Cuando Pedro distribuye su colección en pequeñas pilas, crea una partición por que:

* + Ninguna pila es vacía

❷ Toda estampilla está en una pila, y

❸ En una sola

Estas particiones provienen casi siempre de relaciones tales como:

*... es del mismo país que...*

*...es del mismo color que...*

Inversamente, de toda partición P surge una relación

*...pertenece a la misma clase de P que...?*

Esta relación es reflexiva, transitiva, simétrica.

Así, la relación

*...es un elemento de la misma clase de P que...*

es una equivalencia!

***Toda partición determina una equivalencia***

## Relaciones de Equivalencia

Toda relación binaria definida en un conjunto A, que es a la vez Reflexiva, Transitiva, Simétrica se llama EQUIVALENCIA de notada por “~”.

Para indicar que x está relacionada con xRy se escribe “x~y” y se lee “x es equivalente a y”.

Sea



Y sea



Probar si R es de equivalencia

a) ¿R es reflexiva?

, es decir

1~1, 2~2, 3~3 y 4~4

Luego *R* es reflexiva

b) ¿R es simétrica?

1~2 ⇒ 2~1 es Verdadero

Luego R es simétrica

c) ¿R es transitiva?



Luego *R* es de transitiva

⇒ *R* es de equivalencia

Gráficamente:

A

1

•

•

•

•

3

4

•

•

2

•

•

***¿Cómo determinamos las clases de equivalencia en un conjunto?***

Sea *R* una relación definida en un conjunto E.

Piense en su gráfico.

Este hace aparecer una partición de E

Pondrás dos puntos diferentes de E en una misma clase de la partición, si y solo sí, están unidos por una línea del gráfico, es decir, si y solo sí, se puede ir de uno de estos puntos al otro siguiendo las líneas del gráfico sin prestar atención al sentido de las flechas.



•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

#### Formalmente

Sea “~” una relación de equivalencia definida en un conjunto  y sea . La clase de equivalencia de *a* (que contiene *a*) se define como el conjunto de todos los *x* de *E* tales que sean equivalentes al *a*. Se denota esta clase de equivalencia por:



BD10284_

# Teorema

Si *b* pertenece a la clase de equivalencia de *a*, entonces la clase de equivalencia de *b* y la de *a* son idénticos, es decir:



Este teorema muestra que una clase de equivalencia queda determinada por cualquiera de sus elementos, llamados representante de la clase.

## Conjunto de Índices

Sea  un conjunto dotado de una relación de equivalencia. Se denomina conjunto de índices a un conjunto formado por los representantes de cada clase de equivalencia. Es decir:



## Conjunto cociente

Sea “~” una relación de equivalencia en un conjunto *A*. El conjunto de todos las clases de equivalencia de los elementos de *A* se llama conjunto cociente de *A* por ~, se escribe:

A / ~

Es decir:



## Relaciones de orden

Las sociedades están jerarquerizadas: cada uno debe obediencia a sus superiores.

Una jerarquía, en una sociedad, define una relación en el conjunto de sus individuos.

Veamos cuáles son las propiedades de tales relaciones.

Si *x* debe obedecer a *y*, se trazará una flecha de *x* a *y*.



El soldado debe obedecer al cabo, éste al sargento, el sargento al teniente, etc.

Si el soldado tiene el privilegio de encontrar un teniente, le deberá obediencia.

La relación definida por una jerarquía debe ser transitiva.

*Teniente*



*Sargento*

Esta situación en una jerarquía será catástrofe



La relación definida por una jerarquía debe ser antisimétrica

## Relaciones de orden amplio

Una relación *R* en un conjunto *A* se llama relación de orden amplio o simplemente relación de orden si:

1. Es reflexiva 
2. Es antisimétrica 
3. Es transitiva 

## Relaciones de orden parcial y total

Sea *R* una relación de orden en *A*

1. *R* es de *Orden Parcial* si y solo sí existen pares de elementos incomparables, es decir:



•

•

•

•

•

•

*Teniente*

*Sargento*

*Cabos*

# Ejército

1. El *Orden Total* en caso contrario, es decir:





•

•

•

•

•

1

8

10

100

7

## Relaciones de orden estricto

Una relación *R* definida en un conjunto *A*, se llama relación de orden estricto si es:



1. Antireflexiva
2. Asimétrica
3. Transitiva

Al igual que el orden amplio, el orden estricto puede ser parcial o total.

## TEMA 7

## FUNCIONES

## Formas de expresar una función.

Para comprender cuál es la importancia de aprender funciones, vamos a describir una serie de situaciones bastante diferentes entre sí, pero que comparten una serie de elementos comunes. Estos elementos nos servirán de punto de partida para entender el concepto de función, qué características de una función nos interesan y las distintas maneras de expresar una función.

**2. Ejemplo 1: Estudio de desplazamientos.**

Algunos alumnos del Instituto del municipio salmantino de La Fuente de San Esteban viven en el pueblo de Cabrillas y suelen ir a clase en bicicleta. La distancia entre Cabrillas y el instituto es de 10 km aproximadamente.   
La primera clase empieza a las ocho y cuarto, por lo que estos alumnos suelen salir de casa a las siete y media. Tres de estos alumnos nos cuentan cómo han hecho hoy el viaje:

MARÍA: *"Yo siempre salgo con calma, porque como yo me digo, a esas horas de la mañana no te puedes precipitar... Ya en el camino empiezo a pedalear más deprisa, porque no me gusta llegar tarde"*.

YOLANDA: *"Acababa de salir de casa, cuando me di cuenta de que hoy teníamos Educación Física y se me había olvidado la ropa de deportes. ¿Qué tonta, verdad? Otra vez a casa para cambiarme. Después a toda pastilla para llegar a tiempo."*

PACO: *"Me han regalado una moto y hoy la he traído por primera vez. ¡Guay! Pero como soy un despistado, a mitad de camino, plof, plof ¡sin gasolina! Como no pasaba nadie por la carretera, moto en mano y andando el resto del camino. Llegué por los pelos."*

A continuación aparecen cuatro gráficas que describen las situaciones descritas por María, Yolanda y Paco y, además, la situación vivida por otra alumna, Lidia. Explica, **razonadamente**, qué gráfica corresponde a cada uno de ellos, e indica cuál puede ser el comentario que ha hecho Lidia de su viaje.

**3. Ejemplo 2: Curvas de Lorenz.**

Como medida de la distribución de la riqueza de un país se construye la llamada **curva de Lorenz**. Esta curva se obtiene al representar en una gráfica la riqueza (en tanto por ciento de la **riqueza** total) frente a la población (en tanto por ciento de la población total) ordenada de menos a más ricos.

La forma típica de esa curva es como la de la figura siguiente. ¿Podrías explicar a qué se debe la forma que tiene? Intenta interpretar cómo esa curva mide la concentración de riqueza de un país. Responder a las preguntas que se plantean junto a la gráfica te ayudará a entenderlo.

 1. Pulsa el botón Inicio de la gráfica. Observa su aspecto. Los valores actuales de la gráfica indican Riqueza 8.3% y Población 40%. ¿Cómo interpretas esos valores?

2. Modifica los valores de x en la gráfica para averiguar qué proporción de la riqueza del país detenta el 10% más rico de la población y qué proporción de riqueza detenta el 10% más pobre. Averigua la misma cuestión para el 20% (de ricos y de pobres). Modifica el valor de x hasta que consigas que el valor de la riqueza sea, aproximadamente del 50%. ¿Cómo se distribuye la población para ese valor de riqueza? ¿Podrías describir la situación socio-económica de ese país?

3. Modifica ahora el valor de b. Modificar este valor equivale a describir la situación en otros posibles países. Dale a b distintos valores y, para cada uno de ellos, repite el estudio realizado en la cuestión anterior. El hecho de que la curva de Lorenz se aproxime o se aleje de la diagonal del cuadrado ¿qué interpretación económica tiene?

**4. Ejemplo 3: Cuaderno de naturalista.**

Cierto biólogo está analizando la población de pulgas de agua dulce en un canal. En concreto, está interesado en ver cómo varía la reproducción de estos animales durante 10 semanas a partir del mes de mayo. Por estudios de laboratorio, se sabe que la temperatura del agua influye en el número de crías que tiene esta especie. La tabla 1 nos muestra esa dependencia:

# Tabla 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Temperatura (ºC) del agua** | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| **Nº medio de crías por hembra y día** | 1.3 | 1.5 | 1.7 | 2.0 | 2.3 | 2.6 | 2.9 | 2.8 | 2.7 | 2.6 | 2.4 | 2.3 | 2.2 | 2.0 | 1.8 | 1.5 | 1.1 |

Durante 10 semanas a partir del mes de mayo, el biólogo ha tomado la temperatura media del agua del canal. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 2:

# Tabla 2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Semana** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **Temperatura (ºC) del agua del canal** | 13 | 14 | 15 | 17 | 20 | 18 | 21 | 25 | 22 | 18 |

Combinando ambas tablas, el biólogo puede averiguar el número medio de crías por hembra y día en el canal durante esas diez semanas. Para ello, solo tiene que rellenar la siguiente tabla (hazlo tú):

Principio del formulario

# Tabla 3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Semana** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **Nº medio de crías por hembra y día en el canal** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | | | | | | |  | | |

Final del formulario

¿Cuáles han sido las tres semanas más favorables para su reproducción?

## ****Concepto de función****

**1. Análisis de los ejercicios anteriores.**

Vamos a analizar ahora qué es lo que tienen en común las tres situaciones planteadas en la página anterior.

* En el primer caso (estudio de desplazamientos), la información que hemos analizado venía expresada en forma gráfica. Esas gráficas establecían una relación (numérica en este caso) entre dos magnitudes: el tiempo (medido en minutos) y la distancia (medida en km). Como puedes comprobar, en las cuatro gráficas se verifica que en un determinado instante, t, el punto que representa la distancia recorrida no puede estar en dos posiciones diferentes. En otras palabras, a un valor determinado de t le corresponde un valor y sólo uno de la distancia.

Observa que lo contrario no es necesariamente cierto: en una de las gráficas se produce la siguiente situación: una distancia determinada es alcanzada en dos instantes de tiempo diferentes. ¿En qué gráfica se da esa situación? ¿En qué se ve que se da esa situación?

En el segundo ejemplo estudiado (curvas de Lorenz) la información analizada también venía expresada en forma gráfica y también relacionaba dos magnitudes numéricas, en este caso el porcentaje de población de un país y el porcentaje de riqueza del mismo. Observa que en este ejemplo también sucede que a un determinado porcentaje de población le corresponde un determinado porcentaje de riqueza y sólo uno.

* En el tercer ejemplo nos encontramos, a su vez, con tres situaciones distintas. Las informaciones que se estudian en este tercer ejemplo vienen descritas en forma de tablas numéricas. Cada una de las tres tablas que se analiza establece una relación entre dos magnitudes numéricas: la tabla 1 entre la temperatura del agua medida en ºC y el número medio de crías que tiene una hembra de pulga de agua dulce en ese agua al día; la tabla 2 establece una relación entre el tiempo (medido en semanas) y la temperatura media del agua de una canal (medida en ºC); por último, la tabla 3 establece una relación entre el tiempo (medido en semanas) y el número medio de crías. Al igual que en los casos anteriores se verifica que a un valor determinado de la primera magnitud (en cualquiera de las tres tablas) le corresponde **un valor y sólo uno** de la segunda magnitud.

Lo contrario, en cambio, no siempre es cierto: observa la tabla 1. El número medio de crías puede ser de 2,0 a una temperatura de 15º y a una temperatura de 25º.

# Tabla 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Temperatura (ºC) del agua** | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| **Nº medio de crías por hembra y día** | 1.3 | 1.5 | 1.7 | 2.0 | 2.3 | 2.6 | 2.9 | 2.8 | 2.7 | 2.6 | 2.4 | 2.3 | 2.2 | 2.0 | 1.8 | 1.5 | 1.1 |

# Tabla 2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Semana** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **Temperatura (ºC) del agua del canal** | 13 | 14 | 15 | 17 | 20 | 18 | 21 | 25 | 22 | 18 |

# Tabla 3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Semana** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **Nº medio de crías por hembra y día en el canal** | 1.5 | 1.7 | 2.0 | 2.6 | 2.7 | 2.9 | 2.6 | 2.0 | 2.4 | 2.9 |

## ****2. Definición de función.****

Todo esto nos lleva a la siguiente definición: ***"****Una función es una ley que relaciona dos magnitudes numéricas (llamadas variables) de forma unívoca, es decir, que a cada valor de la primera magnitud (llamada variable independiente) le hace corresponder un valor y sólo uno de la segunda magnitud (llamada variable dependiente). Suele decirse que la segunda magnitud es función de* ***la primera."***

Utilizando estas expresiones en nuestros ejemplos, diremos que la distancia recorrida por los alumnos del primer caso ***es función*** del tiempo que han empleado en recorrerlo; el porcentaje de distribución de la riqueza de un país ***es función*** del porcentaje de población que la detenta; el número medio de crías de la pulga de agua dulce por hembra y día ***es función*** de la temperatura del agua en que viven.

Todos los ejemplos analizados nos permiten ver que a pesar de tratarse de situaciones completamente diferentes todas pueden expresarse simbólicamente de la misma forma:

funcion

donde x representa la variable independiente e y la variable dependiente. Esta manera de representar una función es especialmente interesante cuando la relación f entre la x y la y viene dada por una expresión matemática, pues en ese caso podemos saber con certeza los valores que toma la variable dependiente para cualquier valor que tomemos de la variable independiente. Más aún, si disponemos de una expresión matemática de la función podremos construir con facilidad una tabla de valores de la misma y una gráfica, pues cada pareja de valores (x,y) de la tabla que hagamos representa un punto del plano. Uniendo todos los puntos de la tabla obtendremos la gráfica de la función.

A continuación se te da la oportunidad de que elabores una tabla de valores y una gráfica con una función concreta. Al ir dando valores a x irás obteniendo los correspondientes valores de y. Simultáneamente, el punto correspondiente a la pareja de números (x,y), es decir, (x,f(x)) aparecerá representado gráficamente. Al ir dibujando una serie de puntos vamos obteniendo la gráfica de la función.

**3. Ejercicio 1.**

Determina cuál es la variable independiente en todas las funciones de los ejemplos anteriores.

Principio del formulario

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Función** | **Variable** | **Independiente** |
| **Ejemplo 1** | Distancia |  |
| Tiempo |  |
| **Ejemplo 2** | Porcentaje de riqueza |  |
| Porcentaje de población |  |
| **Ejemplo 3. Tabla 1.** | Temperatura |  |
| Número de crías |  |
| **Ejemplo 3. Tabla 2.** | Temperatura |  |
| Tiempo |  |
| **Ejemplo 3. Tabla 3.** | Tiempo |  |
| Número de crías |  |
|  |  |  |

Final del formulario

**4. Ejercicio 2.**

A continuación se te pide que hagas la representación gráfica de una serie de funciones. Para ello basta con que edites la función que se te pide en la caja de entrada de funciones de la escena siguiente y pulses Intro. Si la gráfica no se ve claramente, puedes probar a cambiar la escala o la posición de los ejes de coordenadas. También puedes representar gráficamente las funciones que tú quieras. Si no sabes muy bien cómo deben introducirse correctamente las expresiones pulsa el botón de ayuda.

f1

f2

f3

f4

Elige tú una función

Principio del formulario

Final del formulario

## **5. **Formas de representar una función**.**

Todo lo estudiado en esta página nos permite ver que una función puede ser presentada de múltiples maneras. Resumiendo, una función puede expresarse mediante:

* ***Una gráfica***. En los ejemplos expuestos la gráfica ha sido de tipo lineal, pero existen multitud de formas gráficas de representación de una función.
* ***Una tabla de valores.***
* ***Una frase que exprese la relación entre ambas variables.***
* ***Una expresión matemática del tipo y=f(x).***

***Observación.***

Todas las funciones que hemos analizado en los ejemplos son ***funciones de una variable***. Reciben este nombre todas las funciones que sólo tienen una variable independiente. En realidad, el concepto de función es más general. La definición más completa de función habría sido la siguiente: ***Una función es una ley que relaciona una o más magnitudes (denominadas variables independientes) con otra magnitud (denominada variable dependiente) de forma unívoca, es decir, que a cada conjunto de valores formado por un valor de cada una de las variables independientes le corresponde un valor de la variable dependiente y sólo uno. Una función de varias variables tendría este aspecto:***

funcion2

Esta primera parte esta centrada nuestro estudio en las funciones de una variable.

**EJERCICIO 2.**

Selecciona un valor para b. Desplazando el punto x a lo largo de la gráfica podrás averiguar cuáles son los valores que puede tomar la variable independiente "% de población" y la variable dependiente "% de riqueza".

Principio del formulario

Contesta a las siguientes cuestiones:

Dom(f) = [ , ]

Im (f) = [ , ]



Final del formulario

**EJERCICIO 3.**

# Tabla 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Temperatura (ºC) del agua** | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| **Nº medio de crías por hembra y día** | 1.3 | 1.5 | 1.7 | 2.0 | 2.3 | 2.6 | 2.9 | 2.8 | 2.7 | 2.6 | 2.4 | 2.3 | 2.2 | 2.0 | 1.8 | 1.5 | 1.1 |

Observa la tabla anterior y contesta a las siguientes cuestiones:

Principio del formulario

Dom(f) = [ , ]

Im (f) = [ , ]



Final del formulario

**EJERCICIO 4.**

Ahora vas a determinar el dominio y el recorrido de una serie de funciones matemáticas. Dibuja las gráficas de las funciones que se te indican en la siguiente tabla y halla sus dominios y recorridos. Dibuja, luego las gráficas de las funciones que quieras y halla también sus dominios y recorridos. Pulsa el botón de ayuda si no sabes cómo escribir alguna función.

f1

f2

f3

f4

Elige tú una función

Principio del formulario

Final del formulario

## ****Propiedades de las funciones.****

En este apartado vamos a analizar algunas de las propiedades más importantes de una función. Estas propiedades nos permitirán obtener información de gran interés sobre la misma.

## ****1. Crecimiento y decrecimiento de una función.****

Responde a las cuestiones que se plantean en la tabla siguiente.

1.- Haz que a tome el valor 1 y d tome el valor 0.75. Como puedes observar, los puntos rojos del eje de abscisas delimitan un entorno del punto a de radio 0.75. Modifica ahora el valor de x para que quede dentro del intervalo delimitado por los puntos rojos. Haz variar la x dentro de ese intervalo y fíjate en los valores que toma f(x) comparados con f(a). ¿Qué puede decirse de f(x) con respecto a f(a) si x está dentro del intervalo rojo pero a la izquierda del punto a? La misma cuestión por la derecha.

2.- Dale ahora al punto a el valor 4.5 y a d el valor 0.25. Vuelve a desplazar x al interior del intervalo rojo y responde a las mismas preguntas del apartado anterior.

3.- Repite las cuestiones con a=4.8 y d=0.20.

4.- Repite las cuestiones con a=6 y d=0.5.

5.- Repite las cuestiones con a=-0.9 y d=0.2.

Si has contestado correctamente a las preguntas de la tabla anterior, habrás obtenido la conclusión de que en el primero y en el segundo casos la respuesta es la misma: ***"Si x está en el entorno rojo, los valores de f(x) son mayores que los de f(a) si x está a la izquierda y menores si x está a la derecha".*** Observa que si haces que el entorno rojo sea más grande puede suceder que la respuesta anterior no sea correcta. Lo importante es que hemos podido encontrar un entorno en el que eso es cierto. La frase anterior significa que en las cercanías de a, cuanto más grande es x más pequeño es f(x). En esta situación se dice que la función ***f(x) es decreciente en el punto a***.

De una manera más rigurosa:  
***Se dice que una función y=f(x) es decreciente en un punto a de su dominio si existe un entorno de dicho punto a, (a-d,a+d), tal que si x está en ese entorno y x a, entonces f(x) f(a) y si x a, entonces f(x) f(a).***

En el cuarto caso habrás comprobado que la situación es a la inversa. Si x está en el entorno rojo y a la izquierda de a, entonces los valores de f(x) son menores que f(a) y si están a la derecha, mayores. En esta situación se dice que la función ***f(x) es creciente en el punto a***.

De una manera más rigurosa:

***Se dice que una función y=f(x) es creciente en un punto a de su dominio si existe un entorno de dicho punto a, (a-d,a+d) tal que si x está en ese entorno y x  a, entonces f(x)  f(a) y si x  a, entonces f(x)  f(a).***

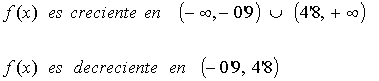
En el tercer caso habrás comprobado que si x está dentro del intervalo rojo, tanto si está a la izquierda como a la derecha del punto a, f(x) es siempre mayor que f(a). Puedes comprobar, que por muy pequeño que hagas el intervalo rojo esto siempre será así. En el último caso f(x) es siempre menor que f(a), tanto a la izquierda como a la derecha. ***En estos dos casos la función no es ni creciente ni decreciente***.

## ****2. Intervalos de monotonía.****

En el apartado anterior hemos definido los conceptos de crecimiento y decrecimiento de una función en un punto. Las propiedades de una función que hacen referencia a puntos concretos reciben el nombre de ***propiedades locales*** de la función. Por lo tanto el crecimiento de una función es una propiedad local.

***Diremos ahora que una función es creciente (o decreciente en su caso) en un intervalo cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo.***

El concocimiento de los intervalos en los que la función crece o decrece proporciona una información de especial interés sobre esa función. Estos intervalos reciben el nombre de ***intervalos de monotonía*** de la función. En el ejemplo anterior la función es decreciente en el intervalo (-0'9,4'8) y decreciente en el resto de su dominio. Simbólicamente esto suele expresarse así:



**EJERCICIO 1.**

Volvamos a uno de los casos del primer ejemplo de esta unidad didáctica. Determina a partir de la imagen adjunta los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función que se describe en la gráfica y da una interpretación del significado de que esa función sea creciente o decreciente.

Cuando una función es creciente (o decreciente en su caso) en todos los puntos de su dominio se dice que la función es ***monótona*** (creciente o decreciente).

**EJERCICIO 2.**

Utilizando uno de los ejercicios de las páginas anteriores. Dibuja todas las funciones que se te indican al margen y todas las que tú quieras además. Para cada una de ellas determina sus intervalos de monotonía e indica en su caso si se trata de una función monótona o no.

f1

f2

f3

f4

Elige tú una función

**Principio del formulario**

**Final del formulario**

## ****3. Extremos relativos**.**

Volvamos ahora a la primera gráfica de esta página. De los cinco casos que hemos estudiado en dos de ellos llegamos a la conclusión de que la función era decreciente y en otro que era creciente; pero nos encontramos con dos casos en los que no era ni una cosa ni la otra. Estos casos especiales reciben el nombre de ***extremos relativos*** de la función. Los extremos relativos de una función se caracterizan porque en sus *alrededores* la función toma valores más pequeños (o más grandes) que en el punto a considerado. En el primero de los casos diremos que en a hay un ***máximo relativo*** de f y en el segundo diremos que en a hay un ***mínimo relativo*** de f. Las palabras máximo y mínimo no deben llevarte a engaño en el sentido de que en ellos la función tome el valor más grande posible (o el más pequeño posible). En ese caso hablaríamos de ***máximos y mínimos absolutos***. Como sucedía con las propiedades de crecimiento y decrecimiento, las propiedades de máximo y mímino relativo son propiedades locales. Con más rigor diremos:

***Sea f(x) una función y a un punto de su dominio. Diremos que a es un máximo relativo (respectivamente, mínimo relativo) de la función f, si existe un entorno del punto a, I, tal que si xI, entonces f(x) f(a) (respectivamente, f(x) f(a). )***

En la gráfica inicial de esta página tenemos que la función f(x) tiene un máximo relativo en el punto a=-0'9 y un mínimo relativo en el punto a=4'8.

**EJERCICIO 3.**

Encuentra los máximos y mínimos relativos de las funciones del ejercicio anterior. Indica cuáles de esas funciones no tienen extremos relativos. Indica también si los máximos y mínimos relativos que encuentres son también máximos y mínimos absolutos.

## ****4. Simetrías de una función.****

Al igual que el conocimiento de las propiedades anteriores, el hecho de saber si la gráfica de una función presenta algún tipo de simetría nos permitirá conocer los valores que toma la función en determinada zona sin más que conocer los valores de la misma función en la zona simétrica. Una función puede presentar muy diferentes tipos de simetría, o ningún tipo en absoluto. De todos los posibles tipos de simetría que pueden presentarse hay dos que son fácilmente detectables y es en esos dos tipos en los que vamos a centrar nuestro estudio. Para ello haremos uso de dos ejemplos.

***Ejemplo 1***

Modifica los valores de x en la tabla siguiente y observa qué sucede con los valores de f(x) y de f(-x).

Final del formulario

Como puedes comprobar, la gráfica anterior es simétrica con respecto al eje de ordenadas. Se dice que presenta simetría axial. Al modificar los valores de x la gráfica va mostrando también los valores de -x, de f(x) y de f(-x). Como habrás observado, para todo valor, x, del dominio de la función se cumple que f(-x)=f(x). Esta propiedad es tan importante que caracteriza a las funciones simétricas con respecto al eje de ordenadas. Algunas de las funciones más sencillas que cumplen esta propiedad son las potencias de x de grado par. Por este motivo todas las funciones que cumplen la condición f(-x)=f(x) reciben el nombre de ***funciones pares*** y su gráfica será necesariamente simétrica con respecto al eje de ordenadas.

**Final del formulario**

***Ejemplo 2***

Modifica los valores de x en la tabla siguiente y observa qué sucede con los valores de f(x) y de f(-x).

Final del formulario

Al modificar los valores de x la gráfica va mostrando también los valores de -x, de f(x) y de f(-x). Como habrás observado, para todo valor, x, del dominio de la función se cumple que f(-x)=-f(x). Observa, además el segmento que une los puntos P1 y P2 correspondientes a los puntos de la función de coordenadas x y -x respectivamente. Ese segmento siempre pasa por el origen de coordenadas y ambos puntos (P1 y P2) equidistan del origen. Esto significa que esta función es simétrica con respecto al origen de coordenadas (se dice que presenta simetría central). Lo que caracteriza a estas funciones es esa propiedad f(-x)=-f(x). Algunas de las funciones más sencillas que tienen esta propiedad son las potencias de x de grado impar. Por ese motivo todas las funciones que la cumplen reciben el nombre de ***funciones impares*** y sus gráficas serán simétricas con respecto al origen de coordenadas.

Final del formulario

**EJERCICIO 4.**

Averigua si alguna de las gráficas del ejercicio 3 son pares o impares o ninguna de ambas cosas. Intenta tú encontrar alguna función que sea par y alguna que sea impar. Dibújalas usando la escena del ejercicio 3 para comprobarlo.

**5. Acotación.**

En ocasiones es importante saber si una función puede tomar cualquier valor o no sobrepasará ciertos valores. Cuando sucede esto último se dice que la función está acotada, y esos valores que la función no sobrepasa reciben el nombre de cotas de la función. Más concretamente:

Decimos que una función está ***acotada superiormente*** si todos los valores de su recorrido son menores o iguales que un cierto número real K, al que llamaremos ***cota superior*** de la función. Desde el punto de vista gráfico, una función acotada superiormente tendrá su gráfica totalmente contenida en el semiplano que queda por debajo de una recta horizontal de ordenada K.

Diremos que una función está ***acotada inferiormente*** si todos los valores de su recorrido son mayores o iguales que un cierto número real, K, al que denominaremos ***cota inferior*** de la función. Desde el punto de vista gráfico, una función acotada inferioremente tendrá su gráfica totalmente contenida en el semiplano que queda por encima de una recta horizontal de ordenada K.

Diremos que una función está ***acotada*** cuando lo está superior e inferiormente.

**EJERCICIO 5.**

A continuación se te pide que dibujes las gráficas de una serie de funciones. Determina para cada una de ellas si están acotadas (superior, inferiormente, ambas o ninguna). En caso de que así sea determina alguna cota (superior, inferior o ambas según el caso). En la gráfica podrás hacer uso de dos rectas horizontales para ayudarte a determinar posibles cotas superiores o inferiores.

f1

f2

f3

f4

Elige tú una función

Principio del formulario

Final del formulario

Si una función está acotada superiormente, la más pequeña de todas sus cotas superiores recibe el nombre de ***extremo superior o mínima cota superior*** de la función y la representaremos mediante la expresión ***sup(f)***. Si, además, existe un punto a del dominio de la función tal que f(a)=sup(f), entonces se dice que esa cota es un ***máximo absoluto*** de la función, es decir, es el valor más grande que toma la función.

Si una función está acotada inferiormente, la mayor de todas sus cotas inferiores recibe el nombre de ***extremo inferior o máxima cota inferior*** de la función y la representamos mediante la expresión ***inf(f)***. Si, además, existe un punto a del dominio de la función tal que f(a)=inf(f), entonces se dice que esa cota es un ***mínimo absoluto*** de la función, es decir, es el valor más pequeño que toma la función.

**EJERCICIO 6.**

En los ejemplos anteriores determina (caso de que existan) los extremos superior e inferior de cada función, indicando si son máximos y mínimos absolutos. Intenta encontrar alguna función acotada que no tenga ni máximo ni mínimo absoluto.

## Formas especiales de representación.

**Algunas formas especiales de representar una función.**

En los capítulos precedentes hemos visto cómo las funciones, sean del tipo que sean, suelen admitir una expresión del tipo y = f(x). Hemos visto también que es especialmente interesante (pues facilita la obtención de información) que la expresión f(x) sea de tipo matemático. Hasta ahora hemos trabajado con expresiones simples como por ejemplo:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| f1 | f2 | f3 | f4 |

Sin embargo, con mucha frecuencia, las expresiones analíticas que aparecen en las Ciencias Sociales no admiten una única formulación para todos los valores de la variable independiente, de manera que es necesario utilizar diferentes fórmulas para la función según los distintos valores de x. De este tipo de funciones se dice que están ***definidas a trozos***.

Por otra parte en las funciones del tipo y=f(x), la relación entre ambas variables x e y está claramente determinada. Por ese motivo la expresión y=f(x) recibe el nombre de ***forma explícita*** de la función. Sin embargo, en algunas ocasiones la relación entre las variables de la función no viene expresada de una forma tan clara sino a través de una ecuación que las liga, como por ejemplo:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ec1 | ec2 | ec3 | ec4 |

Aunque más tarde analizaremos con detalle estos cuatro ejemplos, ya podemos decir que esta manera de representar una función recibe el nombre de ***forma implícita*** de la función.

## ****1. Funciones definidas "a trozos".****

Volvamos al primero de los ejemplos de esta unidad didáctica: las cuatro gráficas del ejemplo de las distancias y el recorrido en bicicleta. Los cuatro son casos de funciones definidas a trozos. En lo que sigue vamos a suponer que x representa el tiempo medido en minutos e y representa la distancia recorrida medida en km. Observa que las cuatro gráficas están formadas por segmentos que, aunque están conectados unos con otros, presentan una cierta "fractura" en sus conexiones. Ésa suele ser una señal inequívoca de que se trata de funciones definidas a trozos.

Realiza las actividades que se indican en cada una de las cuatro gráficas:

1.- Usa la imagen de la izquierda para dibujar la gráfica de la función y=4x. ¿Coincide la gráfica de esta función con parte de la gráfica de la trayectoria de Paco? Si la respuesta es afirmativa, indica entre qué valores de x es eso cierto. Haz lo mismo con la gráfica de la función

trozo1

Si has contestado bien a las cuestiones anteriores y recuerdas el dominio de la función de este ejemplo obtenido en la página "Elementos" te darás cuenta de que la expresión analítica de esta función es la siguiente:

trozo2

2.- Usa la imagen de la izquierda (gráfica de Lidia) para dibujar las gráfica de las funciones

trozo3

¿Coinciden las gráficas de estas funciones con alguna parte de la gráfica de la trayectoria de Lidia? Si la respuesta es afirmativa, indica entre qué valores de x es eso cierto y escribe esta función como una función definida a trozos, siguiendo el modelo del ejemplo anterior.

3.- Usa la imagen de la izquierda (gráfica de María) para dibujar las gráfica de las funciones

trozo4

¿Coinciden las gráficas de estas funciones con alguna parte de la gráfica de la trayectoria de María? Si la respuesta es afirmativa, indica entre qué valores de x es eso cierto y escribe esta función como una función definida a trozos, siguiendo el modelo del ejemplo anterior.

4.- Usa la imagen de la izquierda (gráfica de Yolanda) para dibujar las gráfica de las funciones

trozo5

¿Coinciden las gráficas de estas funciones con alguna parte de la gráfica de la trayectoria de Yolanda? Si la respuesta es afirmativa, indica entre qué valores de x es eso cierto y escribe esta función como una función definida a trozos, siguiendo el modelo del ejemplo anterior.

5.- Veamos ahora algunas funciones matemáticas muy sencillas que pueden ser expresadas como funciones definidas a trozos. Dibuja las funciones que se te indican al margen y después escríbelas en el cuaderno como funciones definidas a trozos. Si no sabes cuál es la sintaxis correcta para escribir esas funciones pulsa en el botón de ayuda.

 y = |x|

f4

y = Ent(x)

y = sgn(x)

Principio del formulario

Final del formulario

## ****2. Funciones expresadas en forma implícita.****

Como dijimos al principio una función puede venir expresada en forma explícita o implícita. Todas las funciones del apartado anterior eran explícitas, pues la relación entre las variables x e y estaba expresada con total claridad. Sin embargo, en los ejemplos del principio

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ec1 | ec2 | ec3 | ec4 |

la relación entre ambas variables viene dada por una ecuación en la que hay que despejar la variable dependiente para poder encontrar la relación entre ambas. Cuando nos encontramos con una expresión implícita hay que tener un poco de cuidado, pues no vale cualquiera. De hecho, ***una de las anteriores expresiones no corresponde a una función. ¿Sabrías decir cuál es y por qué?*** Dibujar las cuatro expresiones anteriores puede servirnos de ayuda. Hazlo usando la escena anterior.

## Funciones elementales: Dependencia lineal.

En los apartados anteriores hemos visto que si una función puede expresarse en términos matemáticos nos permite obtener mucha información de ella con facilidad. Así pues, vamos a estudiar en este apartado y en los siguientes algunas de las funciones matemáticas más sencillas. Vamos a estudiarlas de forma abstracta, pero también vamos a ver ejemplos de cómo se aplican en situaciones concretas. De hecho, las funciones que vamos a estudiar en estos apartados son aquéllas con las que con más frecuencia nos vamos a encontrar.

## **1. **Funciones constantes**.**

Las funciones constantes son las más simples de todas las funciones. Su expresión analítica es y=K, o f(x)=K, siendo K un número real cualquiera. Esto significa que sea cual sea el valor de x la función siempre toma el valor K.

### y = f(x) = K

En la imagen adjunta puedes ver el aspecto que tiene cualquier función constante. Sin más que variar K puedes obtener distintas funciones constantes. Contesta a las preguntas que se te plantean al margen, referentes a las propiedades de las funciones.

1.- Determina el dominio y el recorrido de cualquier función constante.

2.- Estudia sus intervalos de monotonía y sus extremos relativos.

3.- Estudia sus posibles simetrías. ¿Son funciones pares, impares o ninguna de ambas cosas?

4.- ¿Son funciones acotadas? Si la respuesta es afirmativa, ¿superior, inferiormente o ambas cosas a la vez? Determina sus extremos absolutos (si los tiene).

## **2. **Funciones polinómicas de primer grado. Dependencia lineal**.**

La expresión analítica de estas funciones es un polinomio de primer grado, es decir, una expresión del tipo.

### y = ax + b

siendo a y b dos números reales cualesquiera con a distinto de cero. (Observa que si a=0 se trataría de la función constante y = b).

Cuando una función es de este tipo se dice que la y **depende linealmente** de la x. El motivo es que la gráfica de esta función es siempre una línea recta como puedes comprobar en la imagen adjunta. Sin más que variar a y b obtendrás distintas **funciones lineales**. Contesta a las preguntas que se te plantean al margen referentes a sus propiedades.

1.- Modifica los valores de a y de b e intenta encontrar un significado gráfico para cada uno de ellos. ¿Qué puede decirse de dos funciones lineales con el mismo valor de a, pero distinto valor de b? ¿Qué puede decirse de dos funciones lineales con el mismo valor de b, pero distinto valor de a? ¿Qué tiene de especial una función lineal en la que b=0?

2.- Determina el dominio y el recorrido de cualquier función lineal.

3.- Estudia sus intervalos de monotonía y sus extremos relativos. ¿Qué pasa si a es negativo?

4.- Estudia sus posibles simetrías. ¿Son funciones pares, impares o ninguna de ambas cosas?

5.- ¿Son funciones acotadas? Si la respuesta es afirmativa, ¿superior, inferiormente o ambas cosas a la vez? Determina sus extremos absolutos (si los tiene).

El coeficiente a de las funciones lineales se denomina ***pendiente de la recta***, pues es una medida de la inclinación de la misma. Por su parte, el coeficiente b se denomina ***ordenada en el origen*** puesto que es el valor que toma la función cuando x es igual a cero.

Este tipo de funciones aparecen siempre que la variación (o incremento) de la varible dependiente sea ***proporcional*** a la variación (o incremento) de la variable independiente. La siguiente imagen te aclarará lo que acabamos de decir:

1.- Los segmentos rojos de la imagen adjunta representan las variaciones (o incrementos) de las variables x e y. Pulsa el botón Inicio. Observa cuánto vale el cociente entre ambas. ¿Con quién coincide ese cociente? Modifica el parámetro incr, sin modificar ni a ni b. Este parámetro hace que obtengamos distintos incrementos de la variable x que a su vez se transforman en distintos incrementos de la variable y. Como puedes observar, los valores de var(x) y var(y) van cambiando, sin embargo, su cociente permanece constante e igual ¿a quién?

2.- Repite la práctica con otros valores de a y de b. ¿Sigue siendo cierta la respuesta que has dado a la cuestión anterior?

3.- Como ves, el cociente entre la variación de la variable dependiente y la variación de la variable independiente es siempre constante e igual a la pendiente de la recta. En otras palabras, la pendiente, además de medir la inclinación de la recta, mide también la proporción entre ambas variaciones. Observa que si cambias el valor de a, cambia la constante de proporcionalidad, en cambio si alteras el valor de b la constante de proporcionalidad es la misma. ***¿Podrías dar una interpretación de este hecho?***

Es conocido el hecho de que por dos puntos distintos de un plano pasa una recta y sólo una. Esto permite que si estoy estudiando una función cuya dependencia sé que es lineal y conozco sólo dos valores de la misma pueda representarla gráficamente con facilidad. Pero además, lo dicho antes **me permite encontrar con facilidad su expresión analítica**.

En efecto, supongamos que la recta que pretendemos dibujar pasa por los puntos P(x1,y1) y Q(x2,y2). Se supone que estos puntos pertenecen a la gráfica de una función lineal y=f(x)=ax+b. Esto significa que f(x1)=y1 y que f(x2)=y2. Según lo que hemos dicho en el párrafo anterior el cociente entre la variación de la y y la variación de la x tiene que ser igual a la pendiente de la recta, es decir:

lin1

Si ahora consideramos otro punto desconocido de la recta X(x,y), se cumple que y=f(x), pero la variación de y con respecto a la variación de x tiene que seguir siendo la misma, es decir:

lin2

Igualando ambas expresiones obtenemos la expresión implícita de la recta buscada:

lin3

Vamos a hacer algunos ejercicios para asentar todo esto. Se trata de calcular las ecuaciones de las rectas que pasan por dos puntos que se te dan al margen. Además hay que dibujarlas. En la gráfica tienes ya resuelto el primero de los ejemplos. Haz lo mismo con los demás. Intenta obtener después las ecuaciones en la forma y=ax+b.

1.- Halla la recta que pasa por los puntos P(2,3) y Q(1,5)

2.- Lo mismo con P(-5,-3) y Q(3,1)

3.- Lo mismo con P(-4,3) y Q(5,-2)

4.- Lo mismo con P(-3,0) y Q(0,5)

5.- Hazlo ahora con la pareja de puntos que quieras.

**EJERCICIO.**

Vamos a terminar este apartado con una aplicación práctica. Se trata de un problema monetario:

*Tenemos una cantidad x en euros y queremos cambiarlos a dólares americanos.*

*En el banco A por cada euro me dan 0.92 dólares, pero me cobran una comisión fija de 5 euros por la operación.*

*Por su parte, en el banco B me dan 0.80 dólares por cada euro, pero no me cobran comisión.*

*Halla las expresiones que relacionan en cada caso la cantidad "y" de dólares con la cantidad "x" de euros. Representa ambas en la gráfica siguiente y determina en qué banco es más ventajoso el cambio en función de la cantidad que se quiere cambiar***.**

**Funciones elementales: Dependencia cuadrática.**

**Funciones polinómicas de segundo grado: Dependencia cuadrática.**

La expresión analítica de estas funciones es un polinomio de segundo grado, es decir, una expresión del tipo.

### y = ax2 + bx + c

siendo a, b y c números reales cualesquiera con a distinto de cero. (Observa que si a=0 se trataría de la función lineal y=bx+c).

Cuando una función es de este tipo se dice que la y **depende cuadráticamente** de la x. La gráfica de este tipo de funciones es una curva denominada **parábola**. Sin más que variar a , b y c en la imagen adjunta, obtendrás distintas funciones cuadráticas. Contesta a las preguntas que se te plantean al margen referentes a sus propiedades.

1.- Modifica los valores de a, b y c e intenta encontrar un significado gráfico para cada uno de ellos. ¿Qué aspectos de la gráfica se modifican al modificar alguno de esos tres parámetros?

2.- Determina el dominio y el recorrido de cualquier función cuadrática en función de los valores de los tres parámetros.

3.- Estudia sus intervalos de monotonía y sus extremos relativos. ¿Qué pasa si a es negativo?

4.- Estudia sus posibles simetrías. ¿Son funciones pares, impares o ninguna de ambas cosas?

5.- ¿Son funciones acotadas? Si la respuesta es afirmativa, ¿superior, inferiormente o ambas cosas a la vez? Determina sus extremos absolutos (si los tiene).

**EJERCICIO.**

Al igual que en el caso anterior veamos una aplicación práctica. Se trata de un problema económico:

*Tenemos que cercar una finca rectangular que linda con una carretera. La valla que queremos poner del lado de la carretera cuesta a 24 euros/metro y la que queremos poner en los otros tres lados cuesta a 12 euros/metro. Se trata de averiguar qué dimensiones debe tener la finca para que su área sea máxima, sabiendo que tenemos un presupuesto de 4320 euros****.***

Veamos primero el planteamiento del problema. Si llamamos "x" al lado de la finca que linda con la carretera e "y" al otro lado, se trata de hallar el valor máximo de la función Área=xy. Se trata de una función de dos variables que no hemos estudiado, pero el problema nos da algunos datos que nos permiten encontrar una relación entre x e y, esa relación es la siguiente:

#### 24x + 12y + 12x + 12y = 4320

de donde despejando tenemos

cuadra1

y, por tanto, el área viene representada por la función cuadrática

cuadra2

**Funciones de proporcionalidad inversa.**

Este tipo de funciones relacionan las variables x e y a través de expresiones del tipo



siendo k un número real cualquiera distinto de cero. La gráfica de este tipo de funciones es una curva denominada ***hipérbola equilátera***.

En la imagen adjunta puedes ver distintos tipos de funciones de proporcionalidad inversa sin más que variar el valor de k. Contesta a las preguntas que se te plantean al margen referentes a sus propiedades.

1.- Modifica los valores de k e intenta encontrarle un significado gráfico a este parámetro.

2.- Determina el dominio y el recorrido de cualquier función de este tipo.

3.- Estudia sus intervalos de monotonía y sus extremos relativos. ¿Qué pasa si k es negativo?

4.- Estudia sus posibles simetrías. ¿Son funciones pares, impares o ninguna de ambas cosas?

5.- ¿Son funciones acotadas? Si la respuesta es afirmativa, ¿superior, inferiormente o ambas cosas a la vez? Determina sus extremos absolutos (si los tiene).

6.- Una vez analizado el aspecto y las propiedades de estas funciones, ***¿podrías explicar por qué se les da el nombre de funciones de proporcionalidad inversa?***

**EJERCICIO.**

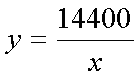
Al igual que hemos hecho en los casos anteriores vamos a ver una aplicación práctica.

***Un grifo con un caudal de 15 litros por minuto ha empleado 16 horas en llenar un depósito. Se trata de averiguar cuánto hubiera tardado si el caudal hubiera sido otro distinto (mayor o menor).***

Al plantear este problema, vemos que evidentemente cuanto mayor sea el caudal menos tiempo se tardará en llenar el depósito y cuanto menor sea el caudal más tiempo tardará.

Los datos del problema nos permiten calcular con facilidad el volumen del depósito: 16 horas = 16 x 60 = 960 minutos; luego el volumen es de 15 x 960 = 14.400 litros.

Como el volumen del depósito es constante, si duplico el caudal, el tiempo de llenado se reduce a la mitad y lo mismo sucede con cualquier variación que se me ocurra. En otras palabras, las magnitudes *caudal del grifo* y *tiempo de llenado* son inversamente proporcionales. Además, si llamamos "x" a la primera e "y" a la segunda, se cumple xy = 14.400, o también



Ahora podemos averiguar cuánto tiempo tarda en llenarse el depósito con cualquier caudal que se nos ocurra. En concreto, averigua cuánto tiempo tardaría en llenarse el depósito con caudales de 10, 20, 25 o 30 litros por minuto usando la imagen adjunta:

**Interpolación.**

En todo este tema has visto distintas maneras de expresar una función. Has visto, por ejemplo, que en numerosas ocasiones las funciones se expresan mediante tablas de valores obtenidos de la observación o de la experimentación. También has visto que cuando la función puede ser expresada mediante una relación matemática (en especial una relación matemática sencilla) es muy fácil obtener información de la misma. Por lo tanto, un problema con el que nos tendremos que enfrentar con frecuencia es cómo obtener una expresión matemática que represente la función que estamos estudiando cuando los datos los hemos obtenido experimentalmente o mediante observación de algún fenómeno.

En la mayoría de los casos este problema es demasiado complejo para resolverlo, por lo que nos conformaremos con una aproximación. El proceso por el que a una tabla de valores se le asocia una expresión matemática que la represente se denomina ***Interpolación***. La función obtenida debe representar de forma exacta los valores de la tabla, pero no proporciona más que una estimación de los valores que no aparezcan en la tabla.

Una vez que hemos aceptado que no vamos a dar con una expresión exacta sino aproximada, surge otro problema. ¿De qué tipo es la función con la que vamos a realizar la aproximación? o dicho de una manera más rigurosa ***¿qué tipo de interpolación vamos a hacer?***.

La representación gráfica de los puntos de la tabla nos puede dar una idea, pues los puntos que se representen pueden mostrar una tendencia. Por ejemplo, si resulta que los puntos parecen estar alineados debemos buscar una función lineal para representarlos. Diremos en ese caso que realizamos una ***interpolación lineal***. Si la apariencia de los puntos se asemeja a una parábola realizaríamos una ***interpolación cuadrática***. Y así con cualquier tipo de función cuyo aspecto conociéramos previamente.

En la práctica puede suceder que no dispongamos de puntos suficientes para adivinar la tendencia, o que aún teniendo puntos suficientes, la gráfica no se parezca a nada conocido. Existen procedimientos bastante complejos para interpolar ese tipo de funciones, pero que no están a nuestro alcance. En una situación de este tipo nosotros nos conformaremos con una interpolación lineal entre cada pareja de puntos, obteniendo una función definida a trozos y cada trozo definido por una función lineal.

Para comprender todo esto mejor haremos uso del siguiente ejemplo:

***A lo largo del día se han recogido los siguientes datos de temperaturas:***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Hora** | 10 | 13 | 17 |
| **Temperatura ºC** | 7 | 18 | 11 |

***Haz una estimación de la temperatura que ha hecho a las 11h, a las 12h, a las 14h, a las 15h y a las 16h.***

Para resolver este problema representaremos gráficamente los puntos de la tabla A(10,7), B(13,18) y C(17,11). Después calcularemos la ecuación de la recta que pasa por A y por B y la que pasa por B y por C. Recuerda que para ello debes hacer uso de la fórmula que nos da la ecuación de la recta conocidos dos de sus puntos:

lin3

Naturalmente los valores obtenidos son simples estimaciones en las que se supone que la temperatura ha ido cambiando de forma lineal y esto puede no ser cierto. Cuanto mayor sea el número de puntos de los que se parte y más próximos estén

entre sí mejor será la estimación. Fenómenos observables. Así presentan comportamiento exponencial: la reproducción de una colonia de bacterias, la desintegración de una sustancia radiactiva, algunos crecimientos demográficos, la inflación, la capitalización de un dinero colocado a interés compuesto, etc.

## FUNCIÓN EXPONENCIAL\_1

**1. DESCRIPCIÓN**

Se llaman funciones exponenciales a las funciones de la forma **f(x) = ax** o **y = ax**, donde la base de la potencia **"a"** es constante (un número) y el exponente la variable **x**.

**UN EJEMPLO REAL**

Algunos tipos de **bacterias** se reproducen por **"mitosis"**, dividiéndose la célula en dos cada espacios de tiempo muy pequeños, en algunos casos cada 15 minutos. ¿Cuántas bacterias se producen en estos casos, a partir de una, en un día?

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Minutos** | 15 | 30 | 45 | 60 | .... |
| **NºBacterias** | 2 | 4 | 8 | 16 | 2x |

siendo **x** los intervalos de 15 minutos:..24 = 16 en una hora, 28 = 256 en dos horas,... 224·4 = 296 = 7,9·1028. ¡en un día!. Esto nos da idea del llamado **¡crecimiento exponencial!**, expresión que se utiliza cuando algo crece muy deprisa.

3.-Haz lo mismo con los valores de ***"a"*** ¿qué se va observando en la gráfica dibujada en azul?.

4.-En particular, ¿qué se observa cuando a = 1, a >1, a <1 pero siempre a positivo?.

5.-¿Y en el caso en que sea a negativo?

De estas observaciones deducimos ***las primeras consecuencias para las funciones exponenciales***:

6.-Observa  que para que la función tenga sentido y se pueda dibujar debe ser ***a > 0*** ¿sabrías decir por qué?. Piensa por ejemplo si ***a*** = -2, ¿cómo se definiría (-2)1/2 ?  . Lo mismo pasaría con otros valores de ***x***, por lo que la función no tendría sentido. Observa que si  ***a*** = 0, se trata de la función 0, sin interés.

7.-Observa  que la función cuando ***a > 1*** es muy distinta que cuando ***a < 1***, y además que cuando   ***a = 1*** se trata de una recta.

## 2. PROPIEDADES GENERALES

A partir de ahora siempre supondremos que  **a > 0** y que **a # 1** .en la siguiente escena observaremos las  propiedades o características de las funciones exponenciales.

1.- Observa que ***la función existe para cualquier valor de x*** (basta con que escribas cualquier valor de ***x*** en la ventana inferior de la escena y ver que siempre se obtiene el correspondiente de ***y***, aunque para valores muy grandes de ***x*** el programa no presente el que toma ***"y"*** realmente por ser muy grande y para valores negativos grandes de ***x*** tome como ***y***=0 por valer casi 0).

***1ª característica:***

***Decimos que la función existe siempre o que el DOMINIO de la función es todo R.***

2.-Observa que en todos los casos la función pasa por un punto fijo: el ***(0,1)*** (basta que asignes el valor a x = 0) o sea que

***2ª característica:***  ***CORTA AL EJE DE ORDENADAS en el punto (0,1).***

3.-Observa que los valores de ***y*** son siempre positivos (prueba cuantos valores desees para x).

por tanto:

***3ª característica: LA FUNCIÓN SIEMPRE TOMA VALORES POSITIVOS para cualquier valor de x.***

4.- Observa que es siempre ***creciente*** o siempre ***decreciente*** (para cualquier valor de ***x***), dependiendo de los valores de la base ***"a"***.

***4ª característica: la función es creciente si a>1 y si 0<a<1 es decreciente***

5.-Observa que se acerca al eje ***X*** tanto como se desee, sin llegar a cortarlo, hacia la derecha en el caso en que ***a<1*** y hacia la izquierda en caso de ***a>1***

***5ª característica: El EJE X ES UNA ASÍNTOTA HORIZONTAL (Hacía la izquierda si a>1 y hacía la derecha si a<1)***

**3. EJEMPLOS DE FUNCIONES EXPONENCIALES**

Finalmente en la siguiente escena se te presentan dibujadas los dos tipos de funciones exponenciales, además de la constante cuando la base es 1; para a =2, a = 1 y a = 1/2.

Además, en rojo se dibuja una función exponencial de base 3, que puedes ir variando a tu gusto.

## FUNCIÓN EXPONENCIAL\_2

**1. CASOS PARTICULARES**

**1. 1. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL EN EL CASO a >1 y en el caso  a=e**

En la siguiente escena se representan las funciones **2x**y **3x** en azul y la función **y** = **ex** en verde .Quizás ya conozcas el número **"e"**. Si no lo conocías, se trata de un número irracional, por tanto con infinitas cifras decimales y no periódico, cuyo valor es **2,718281**... en sus seis primeras cifras decimales.

La función exponencial que tiene por base el número **e** tiene un especial interés que conocerás mejor cuando se estudien los límites y los logaritmos. Evidentemente **e**>1, luego la función ya es conocida.

Además de escribirse como **y = ex** , también se escribe como **y=exp(x)**, por tratarse de la función exponencial más utilizada.

1.-Observa con ayuda de la escena las características de la función:

-la función es siempre ***creciente***.

-el eje ***X*** es una **asíntota** hacia la izquierda, mientras que ***hacia la derecha la función tiende a infinito.***

## 1.2. ****LA FUNCIÓN EXPONENCIAL EN EL CASO a <1****

Es este el caso de las funciones exponenciales que tienen menos interés y pocas veces te aparecerán en el futuro.

En la siguiente escena se te presenta inicialmente la función exponencial de **base 1/2** = 0,5.

1.-  Observa con ayuda de la escena las características de la función:

-Todas son siempre decrecientes (recuerda que a>0)

- Tienen al eje ***X*** por ***asíntota*** horizontal por la derecha, mientras que cuando ***x*** se hace muy pequeño la función tiende a infinito.

2.-Prueba en la escena anterior otros valores positivos para ***"a"*** y menores que 1.

**1.3.** LA FUNCIÓN EXPONENCIAL CON DIFERENTES  EXPONENTES

En algunas ocasiones nos encontramos con funciones exponenciales en las que el exponente no es **x** sino **-x**, **2x**, **x+2**, **x-1**, etc.

1.- Observa la gráfica de ***e-x*** *(exp(-x))* .Ya la habíamos visto ¿no?. Efectivamente, basta observar que **e-x**, es lo mismo que **1/ex=(1/e)x,** y que 1/e es menor que 1, luego se trata de una función exponencial de base menor que 1 ya vista antes. Lo mismo pasaría con otras bases distintas de "e" naturalmente.

2.-Observa ahora cómo son las funciones exponenciales en las que el exponente es del tipo **x+1**, **x+2**, **x-1**, etc.

**1.4.** LA FUNCIÓN EXPONENCIAL ex

En los puntos 1 y 2 se presenta **ex** , comparada con **ex+1** .

1.- Observa qué propiedades de las enumeradas anteriores se mantienen y cuáles cambian. Escríbelo en tu cuaderno de trabajo.

2.-Cambia la La función ***ex+1***, escrita en ***azul***,  por la que desees borrando la actual y escribiendo la nueva en la ventana de la izquierda. En particular puedes cambiar el exponente por **x+2**, **x-1**, **2x**, etc e ir observando cómo cambia la gráfica, siempre comparando con **ex**.

**2.  EJERCICIOS**

Utiliza la escena siguiente, variando la función **exp(x)** para contestar a los siguientes ejercicios.

1.- ¿En qué se diferencian las funciones exponenciales de exponente ***"x"*** y las de exponente ***"-x"***

Para volver a la escena inicial, basta pulsar en el botón ***"inicio".***

2.- ¿En qué cambia la función exponencial cuando el exponente ***"x"*** pasa a ser ***"x+1"***, **"x+2"**, ***"x-1"***, ***"x-3"*** y en general ***"x ± c"***?. ¿y si pasa a ser ***2x***, ***3x***, etc?

3.- ¿Qué función obtenida a partir de la exponencial no tendría al eje ***X*** como asíntota horizontal?

4.- ¿Qué funciones obtenidas a partir de la exponencial, cortarían al eje ***Y*** a la altura ***0***, ***1***, ***2***, ***-1***, ***-2***  etc?

## TEMA 8

## ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

## Introducción

En la [matemática](http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica), una **estructura algebraica** es un conjunto de elementos con unas propiedades operacionales determinadas, es decir, lo que define a la estructura del conjunto son las [operaciones](http://es.wikipedia.org/wiki/Operaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica) que se pueden realizar con los elementos de dicho conjunto y las propiedades matemáticas que dichas operaciones poseen.

Un objeto matemático constituido por un conjunto no vacío y algunas leyes de composición interna definida en él es una estructura algebraica.

Las estructuras algebraicas principales son:

## Semigrupo

Un **semigrupo** es una estructura algebraica de la forma (A,+) donde + es una [operación binaria](http://es.wikipedia.org/wiki/Operaci%C3%B3n_binaria) y asociativa. (si además + es una op. conmutativa, se dice que es un semigrupo conmutativo).

## Monoide

Un **monoide** es un [magma](http://es.wikipedia.org/wiki/Magma_%28%C3%A1lgebra%29) (i.e. un par (M,\*), donde M es un conjunto, y \* una [operación binaria](http://es.wikipedia.org/wiki/Operaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica)) que cumple:

* Es cerrada en M, esto es, el resultado de a\*b pertenece a M para cualesquiera a y b de M.
* Existe una identidad, esto es, un elemento "e" tal que cumple a\*e=e\*a=a.
* La operación \* es [asociativa](http://es.wikipedia.org/wiki/Asociatividad).

En esencia, un monoide es un semigrupo con elemento unidad. Un monoide **abeliano** es un monoide [conmutativo](http://es.wikipedia.org/wiki/Conmutatividad).

## Teoría de categorías

Una categoría monoidal, es una [categoría](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_categor%C3%ADas) con una operación binaria que convierte a la categoría en un monoide. Dos ejemplos:

* 1. La [categoría de conjuntos](http://es.wikipedia.org/wiki/Categor%C3%ADa_de_conjuntos) con la [unión disjunta](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Uni%C3%B3n_disjunta&action=edit) de conjuntos y el [conjunto vacío](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_vac%C3%ADo) como elemento neutro.
  2. La categoría \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}de los espacios vectoriales sobre un [campo](http://es.wikipedia.org/wiki/Cuerpo) \mathbb{K}junto con el [producto tensorial](http://es.wikipedia.org/wiki/Producto_tensorial) de espacios vectoriales y a \mathbb{K}como el elemento neutro.

## Grupo (matemática)

En [matemática](http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica), un **grupo** es un [magma](http://es.wikipedia.org/wiki/Magma_%28%C3%A1lgebra%29) (i.e. un [conjunto](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto), con una [operación binaria](http://es.wikipedia.org/wiki/Operaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica)), que satisface ciertos axiomas, detallados abajo. La rama de la matemática que estudia los grupos es llamada [teoría de grupos](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_grupos).

## Definición

Sea una estructura formada por un [conjunto](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto), **G**, sobre cuyos elementos se ha definido una [operación](http://es.wikipedia.org/wiki/Operaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica), \*, o ley interna:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | \begin{cases}G \times G \to G \\ (x,y) \mapsto x*y\end{cases} |  |

Si la operación verifica las siguientes propiedades, entonces se dice que la estructura (**G**;\*) es un **grupo** con respecto a la operación \*.

1. **Asociativa**: para todo x, y, z pertenecientes a **X** verifica, x*(y*z) = (x*y)*z\;.
2. **Existencia del** [**Elemento Neutro**](http://es.wikipedia.org/wiki/Elemento_neutro) (*e*): \exists e\forall x: (x*e = e*x = x), es decir, existe un elemento *e* tal que para todo *x* su producto mútuo, por ambos lados, es *x*.
3. **Existencia de** [**elemento opuesto**](http://es.wikipedia.org/wiki/Elemento_inverso) (en caso de que la operación se denote aditivamente y no multiplicativamente, el término que se usa es Opuesto y el elemento neutro se denota 0): Para todo elemento *x* de **G**, existe otro elemento *y* de **G**, tal que x*y = y*x = e\;

## Tipos de grupos

* **Grupo conmutativo o abeliano**. Se denomina [grupo conmutativo](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_abeliano) o abeliano a aquel grupo que verifica la [Propiedad](http://es.wikipedia.org/wiki/Propiedad_conmutativa) conmutativa, es decir que para todo x, y de **G**: :x\*y = y\*x
* [**Grupo finito**](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Grupo_finito&action=edit). Es un grupo con un número finito de elementos.
* [**Grupo de Lie**](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_de_Lie). Es un grupo que además tiene estructura de [variedad diferenciable](http://es.wikipedia.org/wiki/Variedad_diferenciable).
* [**Grupo cíclico**](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_c%C3%ADclico). Es un grupo conmutativo, finito o infinito, que puede ser generado por multiplicación reiterada de un sólo elemento.
* [**Grupo libre**](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_libre).

## Ejemplos

La suma define estructura de grupo conmutativo en el conjunto de los [números enteros](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_enteros) (\mathbb{Z}), en el de los [números racionales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_racionales) (\mathbb{Q}), en los [números reales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_reales) (\mathbb{R}) y en los [números complejos](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_complejos) (\mathbb{C}). Los vectores libres del espacio, con la suma de vectores, forman un grupo conmutativo. La suma de matrices define una estructura de grupo conmutativo en las matrices con coeficientes reales (digamos) con un número de columnas y filas prefijado. Las funciones reales de variable real, con la suma de funciones, también forman un grupo conmutativo, al igual que las sucesiones de números reales con la suma de sucesiones.

El producto define estructura de grupo conmutativo en los números racionales no nulos, los números reales positivos, los números complejos de módulo 1, etc. Las matrices cuadradas de n columnas con coeficientes reales y determinante distinto de cero forman un grupo con el producto de matrices, grupo que no es conmutativo cuando n>1.

Otros ejemplos de grupos no conmutativos se obtienen al considerar grupos de transformaciones, donde la operación es la composición de aplicaciones y el elemento neutro es la identidad:

* El grupo de los movimientos del espacio o [grupo de isometría](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_de_isometr%C3%ADa) del [espacio euclídeo](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_eucl%C3%ADdeo), el grupo de las semejanzas del plano o el grupo de las afinidades de una recta (las aplicaciones de la forma x-->ax+b con a distinto de cero).
* El [grupo de Galileo](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Grupo_de_Galileo&action=edit), formado por las transformaciones del espacio y el tiempo que conservan los sistemas de referencia inerciales).
* El [grupo de Lorentz](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_de_Lorentz) de la [teoría de la relatividad](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_la_relatividad), etc.

Todos estos últimos ejemplos lo son del concepto de [Grupo de Lie](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_de_Lie), que son los grupos definidos por operaciones continuas sobre curvas superficies o variedades de dimensión mayor.

La importancia crucial de la teoría de grupos tanto en [Física](http://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%ADsica) como en [Matemática](http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica) radica en que los [isomorfismos](http://es.wikipedia.org/wiki/Isomorfismo) de cualquier estructura, de cualquier teoría, forman siempre un grupo y que, en los casos más importantes, los grupos están clasificados: se conocen listas que agotan todos los que hay. La clasificación de los grupos de Lie, llevada a cabo esencialmente por Elie [Cartan](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Cartan&action=edit), es un punto culminante de la matemática europea, sólo comparable a la construcción de los 5 poliedros regulares realizada por la matemática griega. Al igual que ésta última es la determinación de todas las figuras geométricas simétricas posibles, la clasificación de grupos es la determinación de todas las posibles simetrías de cualquier estructura. Así, podemos conocer *a priori* los grupos de [automorfismos](http://es.wikipedia.org/wiki/Automorfismo) de cualquier teoría geométrica. Además, de acuerdo con el [*Programa de Erlangen*](http://es.wikipedia.org/wiki/Programa_de_Erlangen) de [Felix Klein](http://es.wikipedia.org/wiki/Felix_Klein), este grupo de automorfismos reconstruye la correspondiente teoría geométrica.

Algo parecido sucede en Física, donde se ha descubierto que el grupo de simetrías del [lagrangiano](http://es.wikipedia.org/wiki/Lagrangiano) de un sistema determina propiedades fundamentales asociadas a las partículas elementales de dicho sistema. De hecho, aunque aún no conozcamos las teorías físicas por venir, la clasificación de grupos de Lie ya nos proporciona la lista de los posibles grupos de simetrías infinitesimales.

### Curiosidades

Un grupo puede tener [infinitos](http://es.wikipedia.org/wiki/Infinito) elementos, (como [**Z**](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_entero) con la suma, o los números reales no nulos con el producto) o por el contrario tener un número finito de éstos.

Dado un número natural n, los restos que se obtienen al dividir por *n* (es decir, los números 0, 1, ..., *n* - 1) forman un grupo, donde la suma *a* + *b* es precisamente el resto al dividir la suma ordinaria por *n*. Este grupo se denota con **Z**/*n***Z** y se suele llamar grupo de enteros [módulo](http://es.wikipedia.org/wiki/Aritm%C3%A9tica_modular) n. Así, el grupo **Z**/12**Z** es el que usamos para calcular con las horas de un reloj, y **Z**/24**Z** si queremos distinguir las horas de la mañana de la tarde.

Además, en **Z**/*n***Z** el conjunto de los números [primos relativos](http://es.wikipedia.org/wiki/Primos_entre_s%C3%AD) con *n* (denotado (**Z**/*n***Z**)\*) forma un grupo cuando la operación *ab* es el resto al dividir por *n* el producto usual. Sin embargo, se puede definir un grupo para otros números aunque no sean primos. Por ejemplo, el grupo (**Z**/12**Z**)\* el cual sólo tiene 4 elementos. ¿Por qué sólo 4 elementos? Porque puesto que para ser un grupo, cada elemento ha de tener un inverso. Si tomamos algún número que tenga algún factor común con 12, por ejemplo el 10, éste no puede ser multiplicado por otro número de forma que el resto de la división entre 12 sea 1. Es decir, 10 no tendría inverso. Así, sólo son elementos del grupo (**Z**/12**Z**) aquellos números coprimos con 12. Si *n* hubiese sido [primo](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_primo), todos los menores que él serían coprimos con él, excepto el cero, luego su grupo tendría *n* - 1 elementos.

Se dice que un grupo es [**cíclico**](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_c%C3%ADclico) si verifica estar [generado](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_generador_de_un_grupo) por un solo elemento; es decir, supongamos que un conjunto *A* es grupo con respecto a una operación \*. Si existe un elemento *g* en *A* tal que cualquier otro elemento de *A* se obtiene operando *g* o su inverso *g*-1 reiteradamente:

A=\{ ..., g^{-r}, ..., g^{-1}, g^0=1, g^1=g, g^2, ..., g^r, ...\}=\{g^r|r\in\mathbb{Z}\},

entonces se dice que (*A*,\*) es un [grupo cíclico](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_c%C3%ADclico) y que *g* es un [generador](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_generador_de_un_grupo) de *A*, lo cual se denota por *A*=<*g*>.

La clasificación de grupos cíclicos afirma que los finitos son isomorfos a **Z**/*n***Z**, y los infinitos con **Z**.

## Anillo (matemática)

En [álgebra](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra), un **anillo** es una [estructura algebraica](http://es.wikipedia.org/wiki/Estructura_algebraica) formada por un [conjunto](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto) y dos [operaciones](http://es.wikipedia.org/wiki/Operaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica) que están relacionadas entre sí mediante la [propiedad distributiva](http://es.wikipedia.org/wiki/Propiedad_distributiva), de manera que generalizan la noción de [número](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero), especialmente en el sentido de su "operabilidad".

## Definición

Sea *A* un conjunto. Supongamos que existen dos operaciones binarias definidas +, . sobre *A* que llamaremos suma y multiplicación. Supongamos que dichas operaciones cumplen con

1. La suma es conmutativa: para todo par de elementos *a*, *b* en *A*

a + b = b + a.\,

1. En el conjunto *A* existe un elemento neutro para la suma, que se denota con 0

a + 0 = a.\,

1. Existencia de inverso aditivo: para cada elemento a en *A* existe otro elemento − *a* que cumple

a + (-a) = 0.\,

1. La suma es asociativa: para todo trío de elementos *a*, *b*, *c* en *A*

a + (b + c) = (a + b) + c.\,

1. El producto es asociativo: para todo trío de elementos *a*, *b*, *c* en en *A*

a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c

1. El producto es distributivo respecto de la suma


\begin{align}
  a \cdot(b + c) &= a\cdot b + a\cdot c,\\
  (b + c)\cdot a &= b\cdot a + c\cdot a.
\end{align}


1. Elemento neutro para el producto, denotado por 1, con las propiedades

1\ne0;\qquad\forall a\in A,\quad 1\cdot a = a \cdot 1 = a. 

Entonces se dice que la terna  (A,\ +,\ \cdot) forma un **anillo**[[1]](http://es.wikipedia.org/wiki/Anillo_%28matem%C3%A1tica%29#_note-0#_note-0). Pedir que  1 \ne 0 evita que el anillo sea trivial (conste sólamente del elemento 0). Al elemento 1 también se lo suele llamar *unidad multiplicativa*.

Cuando una terna  (A,\ +,\ \cdot) , sólo satisface las primeras seis propiedades, se dice que forma un pseudo-anillo. Sin embargo, hay autores que definen los anillos, como aquellos que satisfacen estas seis propiedades y a los anillos que cumplen con la séptima propiedad los llaman *anillos con unidad*.

Si *n* es un entero mayor que uno, el conjunto de las matrices cuadradas n\times ncuyas entradas son números reales, junto con la suma de matrices y el producto de matrices, es un ejemplo de anillo. La matriz nula juega el papel del elemento 0 y la matriz que sólo tiene unos en la diagonal principal y sus otras entradas son nulas, juega el papel del elemento 1 en el anillo.

## Centro de un anillo

Se dice que dos elementos *a* y *b* de un anillo **conmutan** si

a\cdot b = b\cdot a

El **centro de un anillo** es el conjunto de elementos *a* del anillo que conmutan con todo otro elemento del anillo y se lo suele denotar con *Z*(*A*). Esto es

Z(A) = \{a\in A\;|\;\forall x\in A,\ a\cdot x = x\cdot a.\}

La definición también tiene sentido si en todos los lugares donde aparece la palabra anillo se la sustituye por pseudoanillo.

## Anillos Conmutativos

Se dice que un anillo (o pseudoanillo) *A* es conmutativo si *A* = *Z*(*A*). El ejemplo más sencillo de anillo conmutativo es el conjunto de los números enteros \mathbb{Z}, junto con las operaciones de suma y multiplicación de enteros[[2]](http://es.wikipedia.org/wiki/Anillo_%28matem%C3%A1tica%29#_note-1#_note-1).

## Dominio de integridad

Supóngase que en un anillo conmutativo, siempre que

c\ne 0\quad \mathrm{y}\quad a\cdot c = b\cdot c,\quad \mathrm{implica}\quad a = b,

entonces se dice que el anillo es un **dominio de integridad**[[3]](http://es.wikipedia.org/wiki/Anillo_%28matem%C3%A1tica%29#_note-2#_note-2).

El conjunto de los números naturales es un dominio de integriadad, no así, el conjunto de funciones reales definidas sobre un intervalo.

## Inverso Multiplicativo

Sea (*A*, +, .) un anillo. Supongamos que existe un par de elementos *a* y *b* en *A* que cumplen

a\cdot b = 1.

Se dice que *a* es el inverso multiplicativo por la izquierda (o simplemente inverso a la izquierda) de *b*. De manera similar, se dice que *b* es el inverso multiplicativo por la derecha (o simplemente inverso a la derecha) de *a*.

Si ocurre que

a\cdot b = b\cdot a = 1.

se dice que *a* y *b* son uno inverso del otro. A veces se escribe *b* = *a* − 1 para resaltar el hecho de que *b* es el inverso (multiplicativo) de *a*.

### Notas

1. [↑](http://es.wikipedia.org/wiki/Anillo_%28matem%C3%A1tica%29#_ref-0#_ref-0) En particular, el par (A,+) es un [grupo abeliano](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_abeliano).
2. [↑](http://es.wikipedia.org/wiki/Anillo_%28matem%C3%A1tica%29#_ref-1#_ref-1) El conjunto de los números pares es un ejemplo de pseudo-anillo.
3. [↑](http://es.wikipedia.org/wiki/Anillo_%28matem%C3%A1tica%29#_ref-2#_ref-2) Véase el artículo [Dominio de integridad](http://es.wikipedia.org/wiki/Dominio_de_integridad), para una definición más general.

## Cuerpo (matemática)

Un **cuerpo** o **campo** es un [anillo de división](http://es.wikipedia.org/wiki/Anillo_de_divisi%C3%B3n) [conmutativo](http://es.wikipedia.org/wiki/Anillo_conmutativo), es decir, un anillo conmutativo en el que todo elemento distinto de cero (todo elemento no nulo) es invertible respecto del producto (es una unidad).

Ejemplos: los [números racionales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_racional), [reales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real), [complejos](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complejo).

En [álgebra abstracta](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_abstracta), un **cuerpo** es una [estructura](http://es.wikipedia.org/wiki/Estructura) algebraica en la cual las operaciones de [adición](http://es.wikipedia.org/wiki/Suma) y [multiplicación](http://es.wikipedia.org/wiki/Multiplicaci%C3%B3n) se pueden realizar y cumplen las propiedades [asociativa](http://es.wikipedia.org/wiki/Propiedad_asociativa), [conmutativa](http://es.wikipedia.org/wiki/Propiedad_conmutativa) y [distributiva](http://es.wikipedia.org/wiki/Propiedad_distributiva), además de la existencia de un inverso aditivo y de un inverso muliplicativo, los cuales permiten efectuar la opraciones de [substracción](http://es.wikipedia.org/wiki/Resta) y [división](http://es.wikipedia.org/wiki/Divisi%C3%B3n_%28matem%C3%A1ticas%29) (excepto la división por cero); estas propiedades ya son familiares de la aritmética de números ordinarios.

Los cuerpos son objetos importantes de estudio en álgebra puesto que proporcionan la generalización apropiada de dominios de números tales como los conjuntos de [números racionales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_racional), de los [números reales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real), o de los [números complejos](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complejo). Los cuerpos eran llamados

Dominios racionales.

El concepto de un cuerpo se usa, por ejemplo, al definir el concepto de [espacio vectorial](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_vectorial) y las transformaciones en estos objetos, dadas por [matrices](http://es.wikipedia.org/wiki/Matriz), dos objetos en el [álgebra lineal](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_lineal) cuyos componentes pueden ser elementos de un cuerpo arbitrario. La [teoría de Galois](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_Galois) estudia las relaciones de simetría en las ecuaciones algebraicas, desde la observación del comportamiento de sus raíces y las extensiones de cuerpos correspondientes y su relación con los automorfismos de cuerpos correspondientes.

## Definición

*Un cuerpo* es un [anillo conmutativo](http://es.wikipedia.org/wiki/Anillo_conmutativo) (*F*, +, \*) tal que 0 es distinto de 1 y todos los elementos de *F* salvo 0 tienen inverso multiplicativo.

Explicado, esto significa que vale lo siguiente:

*F* es cerrado para las operaciones + y \*:

Para toda *a*, *b* en *F*, *a* + *b* y *a* \* *b* pertenecen a *F* (o más formalmente, + y \* son [operación binaria](http://es.wikipedia.org/wiki/Operaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica) en *F*);

Ambas + y \* son asociativas:

Para toda *a*, *b*, *c* en *F*, *a* + (*b* + *c*) = (*a* + *b*) + *c* y *a* \* (*b* \* *c*) = (*a* \* *b*) \* *c*.

Ambas + y \* son conmutativos:

Para toda *a*, *b* en *F*, *a* + *b* = *b* + *a* y *a* \* *b* = *b* \* *a*.

La operación \* es distributiva sobre la operación +:

Para toda *a*, *b*, *c*, en *F*, *a* \* (*b* + *c*) = (*a* \* *b*) + (*a* \* *c*).

Existencia de un elemento neutro para +:

Existe un elemento 0 en *F*, tal que para todo *a* en *F*, *a* + 0 = *a*.

Existencia de un elemento neutro para \*:

Existe un elemento 1 en *F* diferente a 0, tal que para todo *a* en *F*, *a* \* 1 = *a*.

Existencia de elemento opuesto:

Para cada *a* en *F*, existe un elemento -*a* en *F*, tal que *a* + (- *a*) = 0.

Existencia de inversos:

Para cada *a* ≠ 0 en *F*, existe un elemento *a* -1 en *F*, tal que *a* \* *a*-1 = 1.

El requisito 0 ≠ 1 asegura que el conjunto que contiene solamente un cero no sea un cuerpo, y de paso elimina la posibilidad de que en el cuerpo existan [divisores de cero](http://es.wikipedia.org/wiki/Divisor_de_cero) distintos de 0. Directamente de los axiomas, se puede demostrar que (F, +) y (F - { 0 }, \*) son [grupos conmutativos](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_abeliano) y que por lo tanto (véase la [teoría de grupos](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_grupos)) el [opuesto](http://es.wikipedia.org/wiki/Elemento_opuesto) -*a* y el [inverso](http://es.wikipedia.org/wiki/Inverso) *a*-1 son determinados únicamente por *a*. Además, el inverso de un producto es igual al producto de los inversos:

(*a\*b*)-1 = *a*-1 \* *b*-1

con tal que *a* y *b* sean diferentes de cero. Otras reglas útiles incluyen

-*a* = (-1) \* *a*

y más generalmente

- (*a* \* *b*) = (-*a*) \* *b* = *a* \* (-*b*)

así como

*a* \* 0 = 0,

todas reglas familiares de la [aritmética](http://es.wikipedia.org/wiki/Aritm%C3%A9tica) elemental.

## Subcuerpos e ideales

Sea (K,+,\cdot)un cuerpo, y E \subset K. Se dice que *E* es **subcuerpo** de *K* o que *K* es [extensión](http://es.wikipedia.org/wiki/Extensi%C3%B3n_de_cuerpo) de *E* si se cumple que (E,+,\cdot)es un cuerpo cuando las operaciones + y \cdotse restringen a *E*. En particular *E* será entonces [subanillo](http://es.wikipedia.org/wiki/Anillo_%28matem%C3%A1ticas%29) de (K,+,\cdot). Se tiene entonces que (*E*, + ) y (E \setminus \{0\}, \cdot)son [subgrupos](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_matem%C3%A1tico) respectivos de los [grupos abelianos](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_abeliano) (*K*, + ) y (K \setminus \{0\},\cdot).

Como todo cuerpo es un anillo, podríamos preguntarnos por la forma que tengan sus [ideales](http://es.wikipedia.org/wiki/Ideal). Para empezar, como todo cuerpo es [anillo conmutativo](http://es.wikipedia.org/wiki/Anillo_conmutativo), todo ideal por la izquierda es ideal (bilátero) y todo ideal por la derecha es también ideal (bilátero). Así pues sólo hemos de estudiar los ideales del cuerpo. Si *I* es ideal del cuerpo *K*, entonces todo elemento no nulo a \in Kha de tener inverso a^{-1} \in K, luego *a* es una unidad de *K* (a \in U(K)), y se tendrá que I \cap U(K) \neq \varnothing, i.e., *I* = *R*. De esta manera, los únicos ideales de un cuerpo son el propio cuerpo y el ideal nulo.

## Propiedades de los cuerpos

* Todo cuerpo es [dominio de integridad](http://es.wikipedia.org/wiki/Dominio_de_integridad)
* Si (K,+,\cdot)es un cuerpo, entonces, (K*,\cdot)es un [grupo abeliano](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_abeliano)

## Ejemplos de cuerpos

* Los [números racionales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_racionales) \mathbb Q = \{{ a \over b} | a, b \in \mathbb Z, b \neq 0\}donde está incluido el conjunto \mathbb Zde los [números enteros](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_enteros).
* Los [números reales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_reales) \mathbb R.
* Los [números complejos](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_complejos) \mathbb C.
* El cuerpo más pequeño tiene solamente dos elementos: 0 y 1. Es denotado por {\mathbb F}_2o {\mathbb Z}_2y puede a veces ser definido por las dos tablas

+ **0** **1** \* **0** **1**

**0** 0 1 **0** 0 0

**1** 1 0 **1** 0 1

Tiene aplicaciones importantes en [informática](http://es.wikipedia.org/wiki/Inform%C3%A1tica), especialmente en [criptografía](http://es.wikipedia.org/wiki/Criptograf%C3%ADa) y [teoría de la codificación](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Teor%C3%ADa_de_la_codificaci%C3%B3n&action=edit).

* Más generalmente, para un número primo *p*, el conjunto de los *números enteros* módulo *p* es un cuerpo finito con los *p* elementos: esto se escribe a menudo como {\mathbb Z}_p = \{ 0, 1,...,p-1\}donde las operaciones son definidas realizando la operación en \mathbb Z, dividiendo por *p* y tomando el resto, ver [aritmética modular](http://es.wikipedia.org/wiki/Aritm%C3%A9tica_modular).
* Los números reales contienen varios subcuerpos interesantes: los números reales algebraicos, los [números computables](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=N%C3%BAmero_computable&action=edit), y los [números definibles](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=N%C3%BAmero_definible&action=edit).
* Los números complejos contienen el cuerpo de [números algebraicos](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_algebraico), la [clausura algebraica](http://es.wikipedia.org/wiki/Clausura_algebraica) de **Q**.
* Los números racionales se pueden ampliar a los cuerpos de [números p-ádicos](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_p-%C3%A1dico) para cada número primo *p*.
* Sean *E* y *F* dos cuerpos con *E* un **subcuerpo** de *F* (es decir, un subconjunto de *F* que contiene 0 y 1, cerrado bajo las operaciones + y \* de *F* y con sus propias operaciones definidas por restricción). Sea *x* un elemento de *F* no en *E*. Entonces *E*(*x*) se define como el subcuerpo más pequeño de *F* que contiene a *E* y a *x*. Por ejemplo, **Q**(*i*) es el subcuerpo de los números complejos **C** que consisten en todos los números de la forma *a+bi* donde *a* y *b* son números racionales.
* Para un cuerpo dado *F*, el conjunto *F*(*x*) de funciones racionales en la variable *X* con coeficientes en *F* es un cuerpo; esto se define como el conjunto de cocientes de [polinomios](http://es.wikipedia.org/wiki/Polinomio) con coeficientes en *F*.
* Si *F* es cuerpo, y *p*(*X*) es un [polinomio irreducible](http://es.wikipedia.org/wiki/Polinomio_irreducible) en un anillo de polinomios *F*[*X*], entonces el cociente *F*[*X*]/<*p*(*X*)> es un cuerpo con un subcuerpo isomorfo a *F*. Por ejemplo, {\mathbb R[x]} \over {<x^2 + 1>}es un cuerpo (de hecho, es isomorfo al cuerpo de los números complejos).
* Cuando *F* es un cuerpo, el conjunto *F*((*x*)) de [series formales de Laurent](http://es.wikipedia.org/wiki/Serie_de_Laurent) sobre *F* es un cuerpo.
* Si *V* es una [variedad algebraica](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Variedad_algebraica&action=edit) sobre *F*, entonces las funciones racionales *V* → *F* forman un cuerpo, el cuerpo de funciones *V*.
* Si *S* es una [superficie de Riemann](http://es.wikipedia.org/wiki/Superficie_de_Riemann), entonces las funciones [meromorfas](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_meromorfa) de *S* → **C** forman un cuerpo.
* Si *I* es un conjunto de índices, *U* es un [ultrafiltro](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Ultrafiltro&action=edit) sobre *I*, y *Fi* es un cuerpo para cada *i* en *I*, el [ultraproducto](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Ultraproducto&action=edit) de *Fi* (usando *U*) es un cuerpo.
* Los [números hiperreales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_hiperreal) forman un cuerpo que contiene los reales, más los números infinitesimales e infinitos.
* Los [números surreales](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=N%C3%BAmero_surreal&action=edit) forman un cuerpo que contiene los reales, a excepción del hecho de que son una clase propia, no un conjunto. El conjunto de todos los números surreales con el *cumpleaños* menor que un cierto [cardinal inaccesible](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Cardinal_inaccesible&action=edit) es un cuerpo.
* Los [nimbers](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Nimber&action=edit) forman un cuerpo, otra vez a excepción del hecho de que son una clase propia. El conjunto de nimbers con el cumpleaños menor que 2^{2^n}, los nimbers con el cumpleaños menor que cualquier cardinal [infinito](http://es.wikipedia.org/wiki/Infinito) son todos ejemplos de cuerpos.

## Algunos teoremas iniciales

* El conjunto de elementos diferentes de cero de un cuerpo *F* (denotado típicamente por *F*×) es un grupo abeliano bajo multiplicación. Cada subgrupo finito de *F*× es [cíclico](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_c%C3%ADclico).
* La característica de cualquier cuerpo es cero o un [número primo](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_primo). (la característica se define como el número entero positivo más pequeño *n* tal que *n*·1 = 0, o cero si no existe tal *n*; aquí *n*·1 significa *n* sumandos 1 + 1 + 1 +... + 1.)
* Si *q* > 1 es una potencia de un [número primo](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_primo), entonces existe (salvo isomorfismo) exactamente un [cuerpo finito](http://es.wikipedia.org/wiki/Cuerpo_finito) con *q* elementos. Además, estos son los únicos cuerpos finitos posibles.
* Como anillo, un cuerpo no tiene ningún [ideal](http://es.wikipedia.org/wiki/Ideal) excepto {0} y sí mismo.
* Todo anillo de división finito es un cuerpo (teorema de Wedderburn)
* Para cada cuerpo *F*, existe (salvo isomorfismo) un cuerpo único G que contiene a *F*, es [algebraico](http://es.wikipedia.org/wiki/Elemento_algebraico) sobre *F*, y es [algebraicamente cerrado](http://es.wikipedia.org/wiki/Cuerpo_algebraicamente_cerrado). *G* se llama la clausura *algebraica* de *F*.

## Construyendo nuevos cuerpos de otros dados

* Si un subconjunto *E* de un cuerpo (*F*,+,\*) junto con las operaciones \*, + restringido a *E* es en sí mismo un cuerpo, entonces se llama un *subcuerpo* de *F*. Tal subcuerpo tiene los mismos 0 y 1 que *F*.
* Dado un cuerpo F, el cuerpo polinómico *F*(*X*) es el [cuerpo de fracciones](http://es.wikipedia.org/wiki/Cuerpo_de_fracciones) de [polinomios](http://es.wikipedia.org/wiki/Polinomio) en *X* con coeficientes en *F*, es decir, sus elementos son [funciones racionales](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_racional) con coeficientes en F.
* Una [extensión algebraica](http://es.wikipedia.org/wiki/Extensi%C3%B3n_algebraica) de un cuerpo *F* es el cuerpo más pequeño que contiene a *F* y una raíz de un polinomio irreducible *p*(*X*) en *F* [*X*]. Alternativamente, es idéntico al [anillo factor](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Anillo_factor&action=edit) *F* [*X*]/<*p*(*X*)>, donde <*p*(*X*)> es el ideal generado por *p*(*X*).

## Módulo

Un **módulo** es un componente autocontrolado de un [sistema](http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema), el cual posee una interfaz bien definida hacia otros componentes; algo es **modular** si es construido de manera tal que se facilite su [ensamblaje](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensamblaje&action=edit), acomodamiento flexible y [reparación](http://es.wikipedia.org/wiki/Reparaci%C3%B3n) de sus componentes.

* Para módulos en sentido arquitectónico, véase [módulo vitruviano](http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%B3dulo_vitruviano).
* Para la función matemática módulo, véase [valor absoluto](http://es.wikipedia.org/wiki/Valor_absoluto) y [aritmética modular](http://es.wikipedia.org/wiki/Aritm%C3%A9tica_modular).
* Para la estructura algebraica, véase [módulo (matemática)](http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%B3dulo_%28matem%C3%A1tica%29).
* Para módulo de un vector, véase [módulo (vector)](http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%B3dulo_%28vector%29)
* Para las clases de congruencia, véase [aritmética modular](http://es.wikipedia.org/wiki/Aritm%C3%A9tica_modular).
* Para módulos en el [núcleo Linux](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAcleo_Linux), véase [módulo (Linux)](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=M%C3%B3dulo_%28Linux%29&action=edit).
* Para módulos en los [juegos de rol](http://es.wikipedia.org/wiki/Juego_de_rol), véase [módulo (juego de rol)](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=M%C3%B3dulo_%28juego_de_rol%29&action=edit).

## Espacio vectorial

Un espacio vectorial (o espacio lineal) es el objeto básico de estudio en la rama de la [matemática](http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica) llamada [álgebra lineal](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_lineal). Las operaciones que podemos realizar entre ellos son: la suma de vectores y la multiplicación por un escalar,el producto punto, el producto vectorial y el triple producto escalar con algunas restricciones naturales como el cierre de estas operaciones, la asociatividad de estas y la combinación de estas operaciones, siguiendo, llegamos a la descripción de una estructura matemática llamada espacio vectorial.

## Definición formal

Dado un [cuerpo](http://es.wikipedia.org/wiki/Cuerpo_%28matem%C3%A1tica%29) [conmutativo](http://es.wikipedia.org/wiki/Conmutatividad) de escalares **K** (como el cuerpo de los [números reales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real) o el cuerpo de los [números complejos](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complejo)), en el que llamaremos por:

0 (cero) al elemento nulo.

1 (uno) al elemento unidad.

Un [conjunto](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto) **V** dotado de una ley de composición interna (+), (suma de vectores), y una ley de composición externa (·), (producto por un escalar), respecto al cuerpo **K**, es un espacio vectorial si y solo si:

* **V** tiene estructura de [grupo conmutativo](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_conmutativo), respecto a la ley de composición interna (+), (suma de vectores).
* Respecto a su ley de composición externa (·), (producto por un escalar), se cumple:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | \forall a, b \in K | \land | \forall \vec{x} \in V | \Rightarrow | (a+b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x} |
| 2 | \forall a \in K | \land | \forall \vec{x},\vec{y} \in V | \Rightarrow | a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot  \vec{x} + a \cdot \vec{y} |
| 3 | \forall a, b \in K | \land | \forall \vec{x} \in V | \Rightarrow | a \cdot (b \cdot \vec{x}) = (a \cdot b) \cdot \vec{x} |
| 4 | 1 \in K | \land | \forall \vec{x} \in V | \Rightarrow | 1 \cdot \vec{x} = \vec{x} |

## Subespacio vectorial.

Definido un espacio vectorial V, un subconjunto S de V, que a su vez cumple las leyes de espacio vectorial es un [subespacio vectorial](http://es.wikipedia.org/wiki/Subespacio_vectorial).

## Propiedades del espacio vectorial.

Además se cumplen las siguientes 10 propiedades (5 propiedades para la suma vectorial y 5 para el producto por escalares):

(En adelante, y como es costumbre, los vectores se indican con letras latinas con una flecha encima; si no es así se trata de escalares)

* **Para la Suma de vectores**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | Cerradura | \forall \vec{x}, \vec{y} \in V | \Rightarrow | \vec{x} + \vec{y} \in V |
| 2 | Asociatividad | \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V | \Rightarrow | (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) |
| 3 | Conmutatividad | \forall \vec{x},\vec{y} \in V | \Rightarrow | \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} |
| 4 | Inverso Aditivo | \forall \vec{x} \in V , \; \exists -\vec{x} \in V | \Rightarrow | \vec{x} + (-\vec{x}) = -\vec{x} + \vec{x} = \vec{0} |
| 5 | Neutro Aditivo | \forall \vec{x}, \vec{y} \in V | \Rightarrow | \vec{x} + \vec{0} = \vec{x} |

* **Para el Producto por Escalares**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | Cerradura | \forall a \in K | \land | \forall \vec{x} \in V | \Rightarrow | a \cdot \vec{x} \in V |
| 7 | Asociativa | \forall a, b \in K | \land | \forall \vec{x} \in V | \Rightarrow | a \cdot (b \cdot \vec{x}) = (a \cdot b ) \cdot \vec{x} |
| 8 | Distributiva 1 | \forall a, b \in K | \land | \forall \vec{x} \in V | \Rightarrow | (a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x} |
| 9 | Distributiva 2 | \forall a \in K | \land | \forall \vec{x}, \vec{y} \in V | \Rightarrow | a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y} |
| 10 | Neutro del producto | \exists 1 \in K | \land | \forall \vec{x} \in V | \Rightarrow | 1 \cdot \vec{x} = \vec{x} |

(Aquí la suma entre escalares es la definida para el cuerpo de escalares; parece lioso pero la suma entre vectores puede ser construida con otras reglas muy diferentes a las de la suma entre escalares. Sin embargo, como ocurre con los vectores geométricos habituales y los números reales, una suma puede llevar a la otra o estar relacionadas.)

## Otras propiedades.

Las propiedades de la 1 a la 5 indican que  \mathbf{V} es [grupo abeliano](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_abeliano) o conmutativo bajo la suma vectorial.

También, de las propiedades anteriores, se pueden probar inmediatamente las siguientes fórmulas útiles:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 11 | \forall a \in K | \land | \exists \vec{0} \in V | \Rightarrow | a \cdot \vec{0} = \vec{0} |
| 12 | \exists 0 \in K | \land | \forall \vec{x} \in V , \; \exists \vec{0} \in V | \Rightarrow | 0 \cdot \vec{x} = \vec{0} |
| 13 | \forall a \in K, \; \exists -a \in K | \land | \forall \vec{x} \in V , \; \exists - \vec{x} \in V | \Rightarrow | - (a \cdot \vec{x}) = (-a) \cdot \vec{x} = a  \cdot (- \vec{x}) |

## Otra forma de definir un espacio vectorial

Podemos utilizar las [estructuras algebraicas](http://es.wikipedia.org/wiki/Estructura_algebraica) para una definición alternativa, formalmente más elegante desde el punto de vista matemático.

### Premisas

* Sea  \mathbf{V} un [grupo abeliano](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_abeliano) respecto de la [ley de composición](http://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_composici%C3%B3n) interna +.
* Entonces el conjunto de loss de  \mathbf{V} (escrito \mathbf{V} ), o sea de las [aplicaciones lineales](http://es.wikipedia.org/wiki/Aplicaci%C3%B3n_lineal) de  \mathbf{V} , forma un [anillo](http://es.wikipedia.org/wiki/Anillo_%28matem%C3%A1tica%29) ( \mathbf{V}, +, o) , donde **o** es la ley de la composición de las aplicaciones.
* Por otra parte, sea el cuerpo  \mathbb{K} , con sus leyes + y \*; que, por el hecho de serlo, también es un anillo.
* A su vez, para cualquier ***a*** de  \mathbb{K} , se llama [homotecia](http://es.wikipedia.org/wiki/Homotecia) de razón ***a*** al [morfismo](http://es.wikipedia.org/wiki/Morfismo) de  \mathbf{V}, h_a: \vec x \mapsto a . \vec x . (Como morfismo, es una aplicación  \mathbf{V} \to \mathbf{V} , lo que implica el axioma 1 del producto por escalares)

Con estas premisas tenemos la siguiente

### Definición

Se dice que  \mathbf{V} es un espacio vectorial sobre  \mathbb{K} si y sólo si

 f:( \mathbb{K}, +, \* ) \to (\mathbf{V}, +, \circ ) 

 a \mapsto h_a 

es un morfismo de anillos.

## Consecuencias de esta definición

* El hecho que ( V, + ) sea un [grupo abeliano](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_abeliano) resume en sí mismo los axiomas 1, 2, 3, 4 y 5 de la suma vectorial.
* El que ha sea [homotecia](http://es.wikipedia.org/wiki/Homotecia) da cuenta del axioma 4 del producto por escalares ya que es [lineal](http://es.wikipedia.org/wiki/Aplicaci%C3%B3n_lineal).
* El que f sea un morfismo de anillos significa que
  + *f*(*a* + *b*) = *f*(*a*) + *f*(*b*), es decir que *ha* + *b* = *ha* + *hb* o sea (a+b) \vec v = a \vec v + b \vec v (axioma 10)
  + f(ab) = f(a)o f(b), es decir hab = hao hb, o sea  (a.b). \vec x  = a.(b. \vec x )(axioma 7)
  + f(1) = I, o sea h1 = I, donde 1 es el neutro de (K, .) e I es la identidad, es decir la aplicación  I: \vec x \longrightarrow \vec x de V. La identidad es obviamente el neutro de End V. Esto se escribe  1 . \vec v = \vec v para cuaquier vector  \vec v . (axioma 8 )
* Se podría añadir  f(0) = \vec 0 , la aplicación nula de V, pero es una consecuencia de la tercera premisa.
* El último punto ( f(1)= I ) equivale a afirmar que f no es la aplicación nula.

vec 0 </math

## Álgebra

El **álgebra** es la rama de la [matemática](http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica) que estudia [estructuras](http://es.wikipedia.org/wiki/Estructura_algebraica), [relaciones](http://es.wikipedia.org/wiki/Relaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica) y [cantidades](http://es.wikipedia.org/wiki/Cantidad). Junto a la [geometría](http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa), el [análisis matemático](http://es.wikipedia.org/wiki/An%C3%A1lisis_matem%C3%A1tico), la [combinatoria](http://es.wikipedia.org/wiki/Combinatoria) y la [teoría de números](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_n%C3%BAmeros), el álgebra es una de las principales ramas de la matemática.

La palabra «álgebra» deriva del tratado escrito por el matemático [persa](http://es.wikipedia.org/wiki/Persia) [Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi](http://es.wikipedia.org/wiki/Muhammad_ibn_Musa_al-Jwarizmi), titulado *Al-Kitab* **al-Jabr** *wa-l-Muqabala* (en [árabe](http://es.wikipedia.org/wiki/Idioma_%C3%A1rabe) **كتاب الجبر والمقابلة**) (que significa "Compendio de cálculo por el método de completado y balanceado"), el cual proporcionaba operaciones simbólicas para el solución sistemática de [ecuaciones lineales](http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_lineal) y [cuadráticas](http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_cuadr%C3%A1tica). [Etimológicamente](http://es.wikipedia.org/wiki/Etimolog%C3%ADa), la palabra «álgebra» (también nombrado por los árabes *Amucabala*) جبر (yebr) (*al-dejaber*), proviene por lo tanto del [árabe](http://es.wikipedia.org/wiki/Idioma_%C3%A1rabe) y significa "reducción", operación de cirugía por la cual se reducen los huesos luxados o fraccionados (*algebrista* era el médico reparador de huesos).

## Clasificación

El álgebra dio lugar con el tiempo a desarrollos más complejos, de tal manera que es común dividir hoy en día todo el álgebra en las siguientes categorías:

* **Álgebra elemental**, que se restringe al uso de símbolos abstractos para cantidades numéricas y a la resolución de problemas matemáticos elementales eminentemente prácticos por medio de signos.
* **Álgebra abstracta**, que se ocupa del estudio en sí mismas de las estructuras algebraicas y sus propiedades. Dentro de esta se distingue.
  + [Álgebra lineal](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_lineal), estudia las propiedades especificas de los [espacios vectoriales](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_vectorial).
  + [Álgebra universal](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_universal), estudia las ideas comunes a todas las estructuras algebraicas.
  + [Teoría de números algebraicos](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_n%C3%BAmeros_algebraicos), una rama de la [teoría de los números](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_los_n%C3%BAmeros) en la cual el concepto de número se expande a los números algebraicos los cuales son raíces de los polinomios con coeficientes racionales.
  + [Geometría algebraica](http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_algebraica), combina el [Álgebra abstracta](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_abstracta), especialmente el [Álgebra conmutativa](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_conmutativa), con la [geometría](http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa).

## Álgebra elemental

Álgebra elemental' es la forma más básica del álgebra. A diferencia de la [aritmética](http://es.wikipedia.org/wiki/Aritm%C3%A9tica), en donde solo se usan los [números](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros) y sus operaciones aritméticas (como *+, −, ×, ÷*), en álgebra los números son representados por símbolos (usualmente *a, b, x, y*). Esto es útil porque:

* Permite la formulación general de leyes de aritmética (como a + b = b + a), y esto es el primer paso para una exploración sistemática de las propiedades de los [números reales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real).
* Permite referirse a números "desconocidos", formular [ecuaciones](http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n) y el estudio de como resolverlas.
* Permite la formulación de relaciones [funcionales](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_matem%C3%A1tica).

## Álgebra Abstracta

El álgebra abstracta es el campo de la [matemática](http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica) que estudia las [estructuras algebraicas](http://es.wikipedia.org/wiki/Estructuras_algebraicas) como las de [grupo](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_grupos), [anillo](http://es.wikipedia.org/wiki/Anillo_%28matem%C3%A1tica%29), [cuerpo](http://es.wikipedia.org/wiki/Cuerpo_%28matem%C3%A1tica%29) o [espacio vectorial](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_vectorial). Muchas de estas estructuras fueron definidas formalmente en el siglo XIX, y, de hecho, el estudio del álgebra abstracta fue motivado por la necesidad de más exactitud en las definiciones matemáticas. El estudio del álgebra abstracta ha permitido observar con claridad lo intrínseco de las afirmaciones lógicas en las que se basan todas la matemática y las ciencias naturales, y se usa hoy en día prácticamente en todas las ramas de la matemática. Además, a lo largo de la historia, los algebristas descubrieron que estructuras lógicas aparentemente diferentes muy a menudo pueden caracterizarse de la misma forma con un pequeño conjunto de axiomas.

El término álgebra abstracta se usa para distinguir este campo del álgebra elemental o del álgebra de la escuela secundaria que muestra las reglas correctas para manipular fórmulas y expresiones algebraicas que conciernen a los [números reales](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_reales) y [números complejos](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_complejos). El álgebra abstracta fue conocida durante la primera mitad del siglo XX como *álgebra moderna*.

Históricamente, las estructuras algebraicas surgen en algún otro campo distinto a la propia álgebra. Posteriormente, han sido axiomatizadas y luego estudiadas de propio derecho en dicho marco. Por eso, esta materia tiene numerosas y fructíferas conexiones con todas las demás ramas de la matemática.

Algunos ejemplos de [estructuras algebraicas](http://es.wikipedia.org/wiki/Estructuras_algebraicas) con una sola [operación binaria](http://es.wikipedia.org/wiki/Operaci%C3%B3n_binaria) son los:

* [Magmas](http://es.wikipedia.org/wiki/Magma_%28%C3%A1lgebra%29)
* [Cuasigrupos](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Casigrupo&action=edit)
* [Semigrupos](http://es.wikipedia.org/wiki/Semigrupo)
* [Monoides](http://es.wikipedia.org/wiki/Monoide)
* [Grupos](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_grupos)

Otros ejemplos más complejos son:

* [Anillos](http://es.wikipedia.org/wiki/Anillo_%28matem%C3%A1tica%29) y [cuerpos](http://es.wikipedia.org/wiki/Cuerpo_%28matem%C3%A1tica%29)
* [Módulos](http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%B3dulo_%28matem%C3%A1tica%29) y [Espacios vectoriales](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_vectorial)
* [Álgebras asociativas](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_asociativa) y [Álgebras de Lie](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_de_Lie)
* [Retículos](http://es.wikipedia.org/wiki/Ret%C3%ADculo_%28orden%29) y [álgebras de Boole](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_de_Boole)

En [álgebra universal](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_universal), todas esas definiciones y hechos se coleccos provee del formalismo para comparar las diferentes estructuras algebraicas.

## Estructura algebraica

En la matemática, una estructura algebraica es un conjunto de elementos con unas propiedades operacionales determinadas, es decir, lo que define a la estructura del conjunto son las [operaciones](http://es.wikipedia.org/wiki/Operaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica) que se pueden realizar con los elementos de dicho conjunto y las propiedades matemáticas que dichas operaciones poseen. Un objeto matemático constituido por un conjunto no vacío y algunas leyes de composición interna definida en él es una estructura algebraica. Las estructuras algebraicas principales son:

* [Semigrupo](http://es.wikipedia.org/wiki/Semigrupo)
* [Monoide](http://es.wikipedia.org/wiki/Monoide)
* [Grupo](http://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_%28matem%C3%A1tica%29)
* [Anillo](http://es.wikipedia.org/wiki/Anillo_%28matem%C3%A1tica%29)
* [Cuerpo](http://es.wikipedia.org/wiki/Cuerpo_%28matem%C3%A1tica%29)
* [Módulo](http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%B3dulo)
* [Espacio vectorial](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_vectorial)
* **Álgebra**

## Signos y Símbolos

En el álgebra se utilizan signos y símbolos -en general utilizados en la teoría de conjuntos- que constituyen [ecuaciones](http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n), [matrices](http://es.wikipedia.org/wiki/Matriz_%28matem%C3%A1tica%29), [series](http://es.wikipedia.org/wiki/Serie), etc.

Aquí algunos ejemplos:

|  |  |
| --- | --- |
| Signos y Símbolos | |
| Expresión | Uso |
| + | A demás de expresar adicion, también es usada para expresar [operaciones binarias](http://es.wikipedia.org/wiki/Operaci%C3%B3n_binaria) |
| c ó k | Expresan [Términos constantes](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=T%C3%A9rmino_constante&action=edit) |
| Primeras letras del Alfabeto a,b,c,... | Se utiliza para expresar cantidades conocidas |
| Ultimas letras del alfabeto ...,x,y,z | Se utiliza para expresar incógnitas |
| N | Expresa cualquier número (1,2,3,4,...,n) |
| Exponentes y subíndices a',a'',a''', - a1,a2,a3 | Expresar cantidades de la misma especie de diferente magnitud |

Según sean las propiedades que verifica la operación, se tendrán distintas estructuras algebraicas, que, en situaciones más elaboradas, podrán tener definidas, varias leyes de composición interna.

Definición. Sea un conjunto M no vacío. El par (M,\*) es un monoide si y sólo si "\*" es una ley de composición interna de M.

Ejemplo. Son monoides los pares siguientes: (N,+) y (R,/)

Definición. El monoide (S,\*) es un semigrupo si y solo si "\*" es asociativa. Esto es, un semigrupo es un monoide asociativo.

Ejemplo. Son semigrupos los pares (N,\*) y (R,+)

Definición. Sea G un conjunto no vacío y \* una ley de composición interna definida sobre G. El par (G,\*) es un grupo, si y solo si, se cumple:

1. "\*" es asociativa.

2. "\*" tiene elemento neutro en G.

3. Todo a que pertenece a G es inversible en G respecto de \*.

Observaciones. Si (G,\*) es un grupo y además, la operación "\*" es conmutativa, entonces se dice que (G,\*) es un grupo conmutativo (o abeliano).

INDICE

[TEMA 1 1](#_Toc179546685)

[LOGICA BÁSICA 3](#_Toc179546686)

[Introducción 3](#_Toc179546687)

[Enunciados (Proposiciones) y Conectivas 3](#_Toc179546688)

[Proposiciones en las matemáticas 4](#_Toc179546689)

[Tipos de Proposiciones 4](#_Toc179546690)

[Conectivas 5](#_Toc179546691)

[Tabla de Verdad 5](#_Toc179546692)

[Proposición recíproca 9](#_Toc179546693)

[Proposición inversa o contraria 9](#_Toc179546694)

[Fórmulas Proposicionales 11](#_Toc179546696)

[Evaluación de funciones proposicionales por la tabla de verdad 12](#_Toc179546697)

[Tautología, Contradicción y Contingencia 12](#_Toc179546698)

[Equivalencia lógica 14](#_Toc179546699)

[Leyes Lógicas 14](#_Toc179546700)

[Simplificación de fórmulas proposicionales 15](#_Toc179546701)

[Reglas de inferencia y de demostración 16](#_Toc179546702)

[Método de Demostración 19](#_Toc179546703)

[Método directo de demostración 19](#_Toc179546704)

[Método por reducción al absurdo (o indirecto) 19](#_Toc179546705)

[CUANTIFICACIÓN 20](#_Toc179546706)

[Cuantificación Universal 21](#_Toc179546708)

[Regla de la negación en cuantificación 22](#_Toc179546710)

[CIRCUITOS LÓGICOS 24](#_Toc179546711)

[TEMA 2 26](#_Toc179546725)

[CONJUNTOS 26](#_Toc179546726)

[2.1 Introducción 26](#_Toc179546727)

[2.1.1 Noción de conjunto 26](#_Toc179546728)

[2.1.2 Notación 26](#_Toc179546729)

[2.2 Pertenencia 26](#_Toc179546730)

[2.2.1 Notación 26](#_Toc179546731)

[2.2.2 Determinación o designación de conjuntos 27](#_Toc179546733)

[2.4 Conjunto potencia de un conjunto (o conjunto de partes de un conjunto) 34](#_Toc179546745)

[2.5 Operaciones con conjuntos 35](#_Toc179546748)

[Álgebra de conjuntos 41](#_Toc179546749)

[2.5 Particiones (Familias de conjuntos) 42](#_Toc179546750)

[Operaciones generalizadas 43](#_Toc179546751)

[2.6 Producto Cartesiano 44](#_Toc179546752)

[TEMA 3 45](#_Toc179546754)

[NÚMEROS ENTEROS , INDUCCION Y DIVISIBILIDAD 45](#_Toc179546755)

[Introducción 45](#_Toc179546756)

[Número primo 48](#_Toc179546764)

[Número Compuesto 49](#_Toc179546765)

[Propiedades de números primos 49](#_Toc179546766)

[Algoritmo de la División 50](#_Toc179546767)

[Determinación del m.c.d. por el algoritmo de Euclides 51](#_Toc179546768)

[TEMA 4 52](#_Toc179546769)

[CONTEO 52](#_Toc179546770)

[Introducción 52](#_Toc179546771)

[Definición 52](#_Toc179546772)

[Principios Fundamentales del conteo 52](#_Toc179546773)

[Principio de Multiplicación 53](#_Toc179546774)

[Permutaciones 53](#_Toc179546775)

[Permutaciones Circulares 54](#_Toc179546776)

[Permutaciones con Repetición 55](#_Toc179546777)

[Permutaciones de n Objetos tomados r a la vez 56](#_Toc179546778)

[Variaciones con repetición 56](#_Toc179546779)

[Combinaciones 57](#_Toc179546780)

[Combinaciones con repetición 58](#_Toc179546781)

[Binomio de Newton 59](#_Toc179546782)

[Propiedades 60](#_Toc179546783)

[Consecuencias Prácticas 61](#_Toc179546784)

[TEMA 5 62](#_Toc179546785)

[NUMEROS COMPLEJOS 62](#_Toc179546786)

[Introducción 62](#_Toc179546787)

[Historia 62](#_Toc179546789)

[Propiedades 63](#_Toc179546793)

[El Plano Complejo 64](#_Toc179546805)

[Soluciones Complejas 65](#_Toc179546810)

[Unidad Imaginaria 66](#_Toc179546817)

[Representación Binomial 66](#_Toc179546818)

[PLANO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS 66](#_Toc179546819)

[Valor Absoluto ó módulo, Conjugado Y Distancia 66](#_Toc179546820)

[Valor Absoluto O Módulo De Un Número Complejo 66](#_Toc179546821)

[Conjugado de un número complejo 67](#_Toc179546822)

[Representación Trigonometrica Y Representación Geométrica 68](#_Toc179546823)

[Módulo y Argumento 68](#_Toc179546824)

[Geometria Y Operaciones Con Complejos 69](#_Toc179546825)

[Soluciones De Ecuaciones Polinomicas 70](#_Toc179546826)

[Variable Compleja O Analisis Complejo 70](#_Toc179546827)

[***Esbozo Historico*** 70](#_Toc179546828)

[Aplicaciones 71](#_Toc179546829)

[REPRESENTACIONES ALTERNATIVAS DE LOS NUMEROS COMPLEJOS 71](#_Toc179546830)

[TEMA 6 73](#_Toc179546831)

[RELACIONES 73](#_Toc179546832)

[3.1 Relaciones de A en B 73](#_Toc179546833)

[3.2 Dominio, Imagen. Relación Inversa 74](#_Toc179546834)

[3.3 Composición de relaciones 76](#_Toc179546835)

[3.3 Composición de relaciones 77](#_Toc179546836)

[Propiedades de la Composición 77](#_Toc179546837)

[Relaciones definidas en un conjunto 78](#_Toc179546838)

[Propiedades de las relaciones 78](#_Toc179546839)

[Relaciones no reflexivas 79](#_Toc179546840)

[Antirreflexiva 79](#_Toc179546841)

[Relaciones no simétricas 82](#_Toc179546842)

[Relaciones Asimétricas 82](#_Toc179546843)

[Relaciones no transitivas 84](#_Toc179546844)

[Relaciones atransitivas 84](#_Toc179546845)

[Clases de Equivalencia 86](#_Toc179546846)

[Relaciones de Equivalencia 87](#_Toc179546847)

[Conjunto de Índices 90](#_Toc179546848)

[Conjunto cociente 90](#_Toc179546849)

[Relaciones de orden 90](#_Toc179546850)

[Relaciones de orden amplio 90](#_Toc179546851)

[Relaciones de orden parcial y total 91](#_Toc179546852)

[Relaciones de orden estricto 92](#_Toc179546853)

[TEMA 7 93](#_Toc179546854)

[FUNCIONES 93](#_Toc179546855)

[Formas de expresar una función. 93](#_Toc179546856)

[Tabla 1. 94](#_Toc179546857)

[Tabla 2. 94](#_Toc179546858)

[Tabla 3. 95](#_Toc179546859)

[Concepto de función 95](#_Toc179546860)

[Tabla 1. 96](#_Toc179546861)

[Tabla 2. 96](#_Toc179546862)

[Tabla 3. 96](#_Toc179546863)

[2. Definición de función. 96](#_Toc179546864)

[5. Formas de representar una función. 98](#_Toc179546865)

[Tabla 1. 99](#_Toc179546866)

[Propiedades de las funciones. 100](#_Toc179546867)

[1. Crecimiento y decrecimiento de una función. 100](#_Toc179546868)

[2. Intervalos de monotonía. 101](#_Toc179546869)

[3. Extremos relativos. 102](#_Toc179546870)

[4. Simetrías de una función. 103](#_Toc179546871)

[Formas especiales de representación. 105](#_Toc179546872)

[1. Funciones definidas "a trozos". 106](#_Toc179546873)

[2. Funciones expresadas en forma implícita. 107](#_Toc179546874)

[Funciones elementales: Dependencia lineal. 108](#_Toc179546875)

[1. Funciones constantes. 108](#_Toc179546876)

[2. Funciones polinómicas de primer grado. Dependencia lineal. 108](#_Toc179546878)

[FUNCIÓN EXPONENCIAL\_1 115](#_Toc179546881)

[2. PROPIEDADES GENERALES 116](#_Toc179546882)

[FUNCIÓN EXPONENCIAL\_2 117](#_Toc179546883)

[1.2. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL EN EL CASO a <1 117](#_Toc179546884)

[TEMA 8 119](#_Toc179546885)

[ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS 119](#_Toc179546886)

[Introducción 119](#_Toc179546887)

[Semigrupo 119](#_Toc179546888)

[Monoide 119](#_Toc179546889)

[Teoría de categorías 119](#_Toc179546890)

[Grupo (matemática) 120](#_Toc179546891)

[Definición 120](#_Toc179546892)

[Tipos de grupos 120](#_Toc179546893)

[Anillo (matemática) 122](#_Toc179546896)

[Definición 123](#_Toc179546897)

[Centro de un anillo 123](#_Toc179546898)

[Anillos Conmutativos 124](#_Toc179546899)

[Dominio de integridad 124](#_Toc179546900)

[Inverso Multiplicativo 124](#_Toc179546901)

[Cuerpo (matemática) 125](#_Toc179546903)

[Dominios racionales 125](#_Toc179546904)

[Definición 125](#_Toc179546905)

[Subcuerpos e ideales 126](#_Toc179546906)

[Propiedades de los cuerpos 127](#_Toc179546907)

[Ejemplos de cuerpos 127](#_Toc179546908)

[Algunos teoremas iniciales 128](#_Toc179546909)

[Construyendo nuevos cuerpos de otros dados 129](#_Toc179546910)

[Módulo 129](#_Toc179546911)

[Espacio vectorial 129](#_Toc179546912)

[Definición formal 130](#_Toc179546913)

[Subespacio vectorial. 130](#_Toc179546914)

[Propiedades del espacio vectorial. 130](#_Toc179546915)

[Otra forma de definir un espacio vectorial 131](#_Toc179546917)

[Premisas 131](#_Toc179546918)

[Definición 132](#_Toc179546919)

[Álgebra 132](#_Toc179546921)

[Clasificación 133](#_Toc179546922)

[Álgebra elemental 133](#_Toc179546923)

[Álgebra Abstracta 134](#_Toc179546924)

[Estructura algebraica 135](#_Toc179546925)

[Signos y Símbolos 135](#_Toc179546926)

## III. LECTURAS COMPLEMENTARIAS

Una de las principales razones para el estudio de estos temas que corresponden a la matemática discreta es la gran aplicabilidad en las ciencias de la computación; en particular en las áreas de estructuras de datos, la teoría de los lenguajes de computación y el análisis de algoritmos. También tiene su aplicación en otras ingenierías, en las ciencias de la física de la biología, en la estadística, en las ciencias sociales. Por lo tanto estos contenidos proporcionan un valiosos material para estudiantes de muchas áreas, no solo para estudiantes que se especializan en computación o en matemáticas.

## IV. BIBLIOGRAFIA

**AUTOR OBRA LUGAR DE EDICIÓN EDITORIAL AÑO**

Grimaldi R Matemática Discreta México Addison Wesley 1997

Hall Knight Algebra Superior Mexico Uteha 1969

Rojo Armando Álgebra I Buenos Aires El Ateneo 1997

Cárdenas, Luis y Raggi Álgebra Superior México Trillas 1980

## V. DIRECCIONES DE CORREO

<http://www.memo.com.co/fenonino/aprenda/filosofia/filosofia06.html>

<http://www.monografias.com/trabajos4/logica/logica.shtml>

<http://es.wikipedia.org/wiki/Relaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica>

<http://www.monografias.com/trabajos17/relaciones-matematicas/relaciones-matematicas.shtml>

<http://www.escolar.com/matem/13nument.htm>

<http://www.departamento.us.es/da/apuntes/nestructuras.html>

<http://www.fisicanet.com.ar/matematica/m2_funciones.php>

<http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Conjuntos/marco_conjuntos.htm>

## GLOSARIO

* El sistema de **coordenadas polares** es un [sistema de coordenadas](http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_coordenadas) que define la [posición](http://es.wikipedia.org/wiki/Posici%C3%B3n) de un punto en función de los [ángulos](http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81ngulo) directores y de la [distancia](http://es.wikipedia.org/wiki/Distancia) al origen de referencia
* Función continua en el caso de aplicaciones de  \mathbb{R} en  \mathbb{R} , y de una manera más rigurosa se dice que una función; **f** es continua en un punto **x1** si existe **f(x1)**,
* Un **polinomio**, es una [expresión](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Expresi%C3%B3n_matem%C3%A1tica&action=edit) que se construye por una o más variables, usando solamente las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y exponentes numéricos positivos. x^2 - 4x + 7\,es un polinomio
* En [matemática](http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica), un [**intervalo**](http://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo_%28matem%C3%A1tica%29) es un [subconjunto conexo](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Conexidad&action=edit) de [**R**](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real)
* R es conjunto de números reales.
* Z es conjunto de números enteros