2.2 Transformada de Laplace y Transformada $\mathbb{Z}$

2.2.1 Definiciones

2.2.1.1 Transformada de Laplace

Dada una función $f(t)$ de los reales en los reales,

$$f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Existe una función $\mathcal{L}$ denominada *Transformada de Laplace* que toma como argumento $f(t)$ y produce una función $F(s)$ de los complejos en los complejos.

$$F(s) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

La función $\mathcal{L}^{-1}$ denominada *Transformada Inversa de Laplace* toma como argumento $F(s)$ y produce $f(t)$, tal como se visualiza en la figura 2.1

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} & F(s) \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} & & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \end{array}$$

Figura 2.1: Transformada de Laplace

La Transformada de Laplace se define como

$$F(s) \doteq \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{2.14}$$

La integral que define la transformada de Laplace puede no converger para algunos valores de la variable compleja s. Se define la *Región de Convergencia* para la transformada. Este hecho es irrelevante para nuestras aplicaciones de soluciones de E.D. lineales.

Existe una definición alternativa, conocida como la *Transformada bilateral de Laplace*, cuyos límites de integración son ($-\infty$ y ∞):

$$F_b(s) \doteq \mathcal{L}_{\lfloor}\left\{f(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{2.15}$$

Debido a que nuestro interés se centra en el comportamiento de las señales a partir del instante de tiempo $t = 0$, trabajaremos con la versión unilateral de la transformada.

2.2.1.2 Transformada $\mathcal{Z}$

Dada una función $f(t)$ de los enteros en los reales,

$$f(k) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

Existe una función $\mathcal{L}$ denominada *Transformada* $\mathcal{Z}$ que toma como argumento $f(t)$ y produce una función $F(s)$ de los complejos en los complejos.

$$F(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

La función $\mathcal{Z}^{-1}$ denominada *Transformada Inversa* $\mathcal{Z}$ toma como argumento $F(z)$ y produce $f(k)$, tal como se visualiza en la figura 2.2

$$\begin{array}{ccc} f(k) & \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftarrows}} & F(z) \\ \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} & & \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \end{array}$$

Figura 2.2: Transformada $\mathcal{Z}$

La Transformada $\mathcal{Z}$ se define como

$$F(z) \doteq \mathcal{Z}\left\{f(k)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \tag{2.16}$$

La sumatoria que define la transformada $\mathcal{Z}$ puede no converger para algunos valores de la variable compleja z. Se define la *Región de Convergencia* para la transformada. Este hecho es irrelevante para nuestras aplicaciones de soluciones de E.D. lineales.

Existe una definición alternativa, conocida como la *Transformada bilateral* $\mathcal{Z}$, cuyos límites de integración son ($-\infty$ y ∞):

$$F(z) \doteq \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k} \tag{2.17}$$

Debido a que nuestro interés se centra en el comportamiento de las señales a partir del instante de tiempo $k = 0$, trabajaremos con la versión unilateral de la transformada.

La tabla 2.3 muestra una comparación entre las definiciones de las Transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$

Tabla: Comparación de las definiciones de las Transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$

Transformada de Laplace	Transformada $\mathcal{Z}$
$f(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(s)$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$	$f(k) \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftarrows}} F(z)$ $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$
La Transformada de Laplace se define como $F(s) \doteq \mathcal{L}\{f(t)\}$ $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	La Transformada $\mathcal{Z}$ se define como $F(z) \doteq \mathcal{Z}\{f(k)\}$ $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$
Transformada bilateral de Laplace: $F_b(s) \doteq \mathcal{L}_\text{L}\{f(t)\}$ $F_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	*Transformada bilateral* $\mathcal{Z}$: $F_b(z) \doteq \mathcal{Z}_\text{L}\{f(k)\}$ $F_b(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}$

2.2.2 Propiedades

Las transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$ satisfacen ciertas propiedades que son muy similares para una y otra transformada; algunas de estas transformadas se listan en la tabla 2.4, y sus demostraciones se presentan en el apéndice ❑. De estas propiedades destacamos los siguientes hechos:

1. La propiedad de linealidad permite que la aplicación de estas transformadas a la solución de E.D. sea bastante simple. Por el contrario, estas transformadas no suelen ser útiles para solucionar E.D. No Lineales.
2. Las propiedades de Diferenciación y Diferencias Positivas son las que permiten convertir Ecuaciones Diferenciales y Ecuaciones de Diferencia, respectivamente, en Ecuaciones Algebráicas.
3. Hay una diferencia sutil pero importante entre las propiedades de Diferenciación y Diferencias Positivas: las condición inicial $f(0)$ está multiplicada por z en el caso discreto, mientras que en el caso contínuo no está multiplicada por s.

Este hecho origina algunas diferencias en la forma de las parejas de funciones y sus transformadas (ver sección 2.2.3) y en la forma en que se emplea la Expansión en Fracciones Parciales para calcular las Transformadas Inversas(ver sección 2.2.5).

4. La propiedad de multiplicación por el tiempo tiene una expresión directa en el caso contínuo (multiplicación por t^n) mientras que en el caso discreto tiene una expresión iterativa (multiplicación por k^n). Este hecho se ve reflejado en la tabla 2.6
5. La propiedad de Convolución pone de manifiesto que la transformada del producto de dos funciones **NO** es el producto de las transformadas individuales.

Tabla: Propiedades de las Transformadas de Laplace $\mathcal{Z}$

Transformada de Laplace	Transformada $\mathcal{Z}$
Sean $f(t), f_1(t), f_2(t)$ tres funciones cuyas Transformadas de Laplace son, respectivamente $F(s), F_1(s), F_2(s)$, y a un escalar (real o complejo). Se cumplen las siguientes propiedades:	Sean $f(k), f_1(k), f_2(k)$ tres funciones cuyas Transformadas $\mathcal{Z}$ son, respectivamente $F(z), F_1(z), F_2(z)$ y a un escalar (real o complejo). Se cumplen las siguientes propiedades:
Linealidad: $$\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\}=F_1(s)+F_2(s)$$ $$\mathcal{L}\{af(t)\}=aF(s)$$	**Linealidad:** $$\mathcal{Z}\{f_1(k)+f_2(k)\}=F_1(z)+F_2(z)$$ $$\mathcal{Z}\{af(k)\}=aF(z)$$
Diferenciación: $$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}=sF(s)-f(0^+)$$	**Diferencia positiva:** $$\mathcal{Z}\{f(k+1)\}=zF(z)-zf(0)$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\}=s^nF(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1}f^{(i)}(0^+)$$	$$\mathcal{Z}\{f(k+n)\}=z^nF(z) - \sum_{i=n}^{n-1} z^{n-i}f(i)$$
Desplazamiento en la Frecuencia: $$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a)$$	**Escalamiento en la Frecuencia:** $$\mathcal{Z}\left\{a^k f(t)\right\}=F(z/a)$$
Multiplicación por t: $$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$$	**Multiplicación por** k: $$\mathcal{Z}\{k^n f(k)\}=-z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\left\{k^{(n-1)}f(k)\right\}$$
Teorema de valor Inicial: $$\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$	**Teorema de valor Inicial:** $$f(0)=\lim_{z\to\infty} F(z)$$
Teorema de valor final: $$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$	**Teorema de valor final:** $$\lim_{k\to\infty} f(k)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

Convolución:	Convolución:
$\mathcal{L}\left\{f_1(t) * f_2(t)\right\} = F_1(s)F_2(s)$ $f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$	$\mathcal{Z}\left\{f_1(k) * f_2(k)\right\} = F_1(z)F_2(z)$ $f_1(k) * f_2(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k)f_2(h-k)$

2.2.3 Parejas de Transformadas

La tabla 2.5 muestra las parejas de transformadas para las funciones elementales más importantes en el análisis de sistemas dinámicos. El contenido de la tabla se demuestra en el Apéndice . De estas parejas destacamos los siguientes hechos:

1. en cada uno de los casos de las tablas 2.5 y 2.6, las transformadas (de Laplace o $\mathcal{Z}$) son fraccciones de polinomios en la variable compleja (s o z).
2. Al comparar estos polinomios en funciones análogas (por ejemplo e^{at} y a^k) notamos que el orden del denominador es el mismo; en el numerador, sin embargo, sucede que el orden de los polinomios de la transformada $\mathcal{Z}$ siempre es superior en 1 al de su contraparte en la transformada de Laplace.
3. Si centramos nuestra atención en la tabla 2.5, podemos notar que la ubicación de los polos de las funciones transformadas en el plano complejo determina el tipo de función en el dominio del tiempo, en la forma que muestran la tabla 2.7 y las figuras 2.3 y 2.4
4. Las funciones reseñadas en la tabla 2.6 también están asociadas a una ubicación específica de los polos en el plano complejo, pero cuando éstos se repiten.

Tabla 2.5: Tabla de parejas de transformadas elementales

Transformada de Laplace		Transformada $\mathcal{Z}$	
$f(t)$	$F(s)$	$f(k)$	$F(z)$
$\mu(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mu(k)$	$\frac{z}{z-1}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	a^k	$\frac{z}{z-a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin ak$	$\frac{z \sin a}{z^2 - 2z \cos a + 1}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos ak$	$\frac{z^2 - z \cos a}{z^2 - 2z \cos a + 1}$
$e^{\sigma t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$	$b^k \sin ak$	$\frac{zb \sin a}{z^2 - 2bz \cos a + b^2}$
$e^{\sigma t} \cos \omega t$	$\frac{(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$	$b^k \cos ak$	$\frac{z^2 - zb \cos a}{z^2 - 2bz \cos a + b^2}$

Tabla 2.6: Tabla de parejas de transformadas elementales multiplicadas por el tiempo

Transformada de Laplace		Transformada $\mathcal{Z}$	
$f(t)$	$F(s)$	$f(k)$	$F(z)$
$t\mu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$k\mu(k)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$t^n\mu(t)$	$\frac{n!}{s^{(n+1)}}$	$k^n\mu(k)$	*iterar*
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	ka^k	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{(n+1)}}$	$k^n a^k$	*iterar*
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$k\sin ak$	$\frac{z^3\sin a - z\sin a}{[z^2-2z\cos a+1]^2}$
$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$k\cos ak$	$\frac{[z^3+z]\cos a - 2z^2}{[z^2-2z\cos a+1]^2}$
$te^{\sigma t}\sin\omega t$	$\frac{2\omega(s-\sigma)}{((s-\sigma)^2+\omega^2)^2}$	$kb^k\sin ak$	$\frac{z^3 b\sin a - zb^3\sin a}{[z^2-2bz\cos a+b^2]^2}$
$te^{\sigma t}\cos\omega t$	$\frac{(s-\sigma)^2-\omega^2}{((s-sigma)^2+\omega^2)^2}$	$kb^k\cos ak$	$\frac{[bz^3+b^3z]\cos a - 2b^2z^2}{[z^2-2bz\cos a+b^2]^2}$

Tabla 2.7: Ubicación de los polos en los planos complejos y funciones en el tiempo

Caso Contínuo		*Caso Discreto*	
Ubicación de los polos	Función	Ubicación de los polos	Función
Origen	escalón	$(1,0)$	escalón
Semieje real positivo	exponenciales crecientes	Intervalo $(1,\infty)$ del eje real	series geométricas crecientes no alternantes
		Intervalo	series

		$(-\infty,-1)$ del eje real	geométricas crecientes alternantes
Semieje real negativo	exponenciales decrecientes	Intervalo $(0,1)$ del eje real	series geométricas decrecientes no alternantes
		Intervalo $(-1,0)$ del eje real	series geométricas decrecientes alternantes
Eje imaginario	sinusoidales	circunferencia unitaria	sinusoidales.
Complejos en el semiplano derecho	funciones sinusoidales amplificadas por una exponencial creciente	Complejos fuera del círculo unitario	sinusoidales amplificadas por una serie geométrica creciente
Complejos en el semiplano izquierdo	sinusoidales amplificadas por una exponencial decreciente	Complejos dentro del círculo unitario	sinusoidales amplificadas por una serie geométrica decreciente

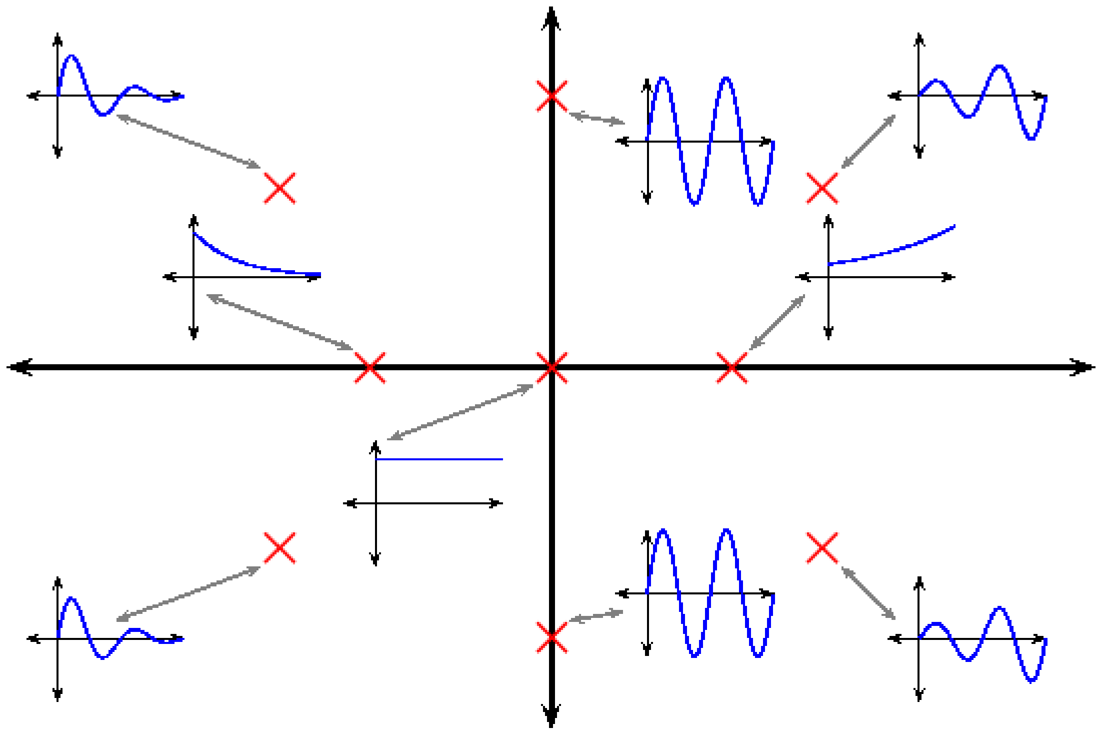

Figura 2.3: Funciones contínuas según la ubicación de sus polos en el plano s

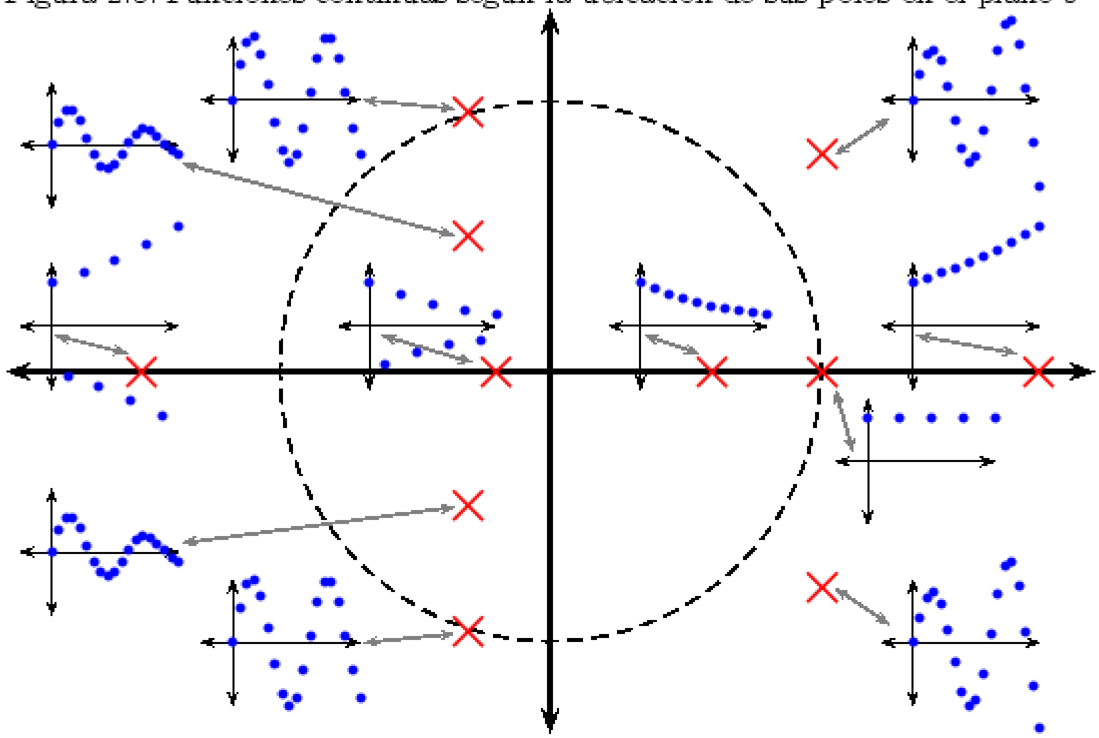

Figura 2.4: Funciones discretas según la ubicación de sus polos en el plano s

2.2.4 Utilización de la tabla de parejas de transformadas

Para emplear la Tabla de parejas de transformadas para obtener la transformada inversa de una función, primero hay que expresar ésta última como alguno de los casos que aparecen en la tabla. Suele ser útil recordar que las transformaciones de Laplace y $\mathcal{Z}$ son funciones lineales.

Ejemplo 2.3 Para obtener la transformada inversa de Laplace de $F(s) = \frac{4}{s-3}$, primero reescribimos la $F(s)$ como:

$$F(s) = \frac{4}{s-3} = 4\frac{1}{s-3}$$

La expresión $\frac{1}{s-3}$ es de la forma $\frac{1}{s-a}$, cuya transformada inversa de Laplace es e^{at}. Aplicando linealidad tenemos:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{4\frac{1}{s-3}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = 4e^{3t}$$

Ejemplo 2.4 Para obtener la transformada inversa de Laplace de $F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$, primero destacamos que el denominador de $F(s)$ es de segundo orden, y por tanto es similar al que aparece en las transformadas de Laplace de las sinusoides amortiguadas. Con esto presente, buscamos reescribir $F(s)$ con el denominador en la forma $(s-\sigma)^2+\omega^2$. Para ello, nótese que

$$(s-\sigma)^2+\omega^2 = s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2$$

Igualando los coeficientes podemos identificar $-2\sigma = 1$ (y por tanto $\sigma = -1/2$) y $\sigma^2+\omega^2 = 1$ (y por tanto $\omega^2 = 3/4$). En consecuencia, podemos reescribir $F(s)$ como

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1} = \frac{s+2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$F(s) = \frac{s+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

Los dos sumandos corresponden a transformadas de la forma $e^{\sigma t}\cos(\omega t)$ + $e^{\sigma t}\sin(\omega t)$, por lo tanto:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

Este resultado puede reescribirse utilizando la identidad trigonométrica:

$$A\cos\phi + B\sin\phi = C\cos(\phi+\theta)$$

con $C = \sqrt{A^2+B^2}$ y $\theta = -\tan^{-1}\frac{B}{A}$. Por lo tanto, $f(t)$ resulta ser:

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[\sqrt{1+3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}\right)\right]$$

$$f(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - 60^\circ\right)$$

2.2.5 Transformadas Inversas por Expansión de Fracciones Parciales

Una de las estrategias que puede emplearse para obtener la Transformada Inversa de Laplace (o $\mathcal{Z}$) de una función racional de polinomios en s (e z):

$$F(s) = \frac{\alpha_m s^m + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}{\beta_n s^n + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}$$

consiste en reescribir $F(s)$ ($F(z)$)como suma de funciones más sencillas, cuyas transformadas inversas sean posibles de obtener mediante la lectura de las tablas de parejas. Este procedimiento se conoce como la *Expansión en Fracciones Parciales*.

El procedimiento general puede enumerarse como sigue:

1. Si $m \geq n$ entonces se realiza la división hasta obtener una fracción en la que el grado del polinomio del denominador sea mayor a la del numerador; en lus siguientes puntos se trabaja sólo con la fracción.

   Ejemplo 2.5

$$F(s) = \frac{2s^2+s+2}{s+1} = 2s - 1 + \frac{3}{s+1}$$

2. Identificar las raices del polinomio del denominador (p_i), y cuantas veces se repite cada una de ellas (r_i, o multiplicidad de la raiz).

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)^{r_1}(s-p_2)^{r_2}\cdots(s-p_k)^{r_k}}$$

Evidentemente la suma de las multiplicidades será n, el grando del polinomio $D(s)$

3. Escribir la fracción como suma de de fracciones parciales:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{A_{11}}{(s-p_1)} + \cdots + \frac{A_{1r_1}}{(s-p_1)^{r_1}} + \frac{A_{21}}{(s-p_2)} + \cdots + \frac{A_{kr_k}}{(s-p_k)^{r_k}}$$

4. Obtener los coeficientes A_{ij}

Este sencillo procedimiento tiene dos puntos de dificultad, el primero de los cuales es cómo encontrar las raices de $D(s)$, y el segundo cómo obtener los coeficientes A_{ij}.

Para la obtención de las raices suponemos que disponemos de algún tipo de procedimiento (analítico o computacional) para ello. Para la obtención de los coeficientes A_{ij}, por su parte, pueden seguirse los siguientes procedimientos, según sea el caso:

1. **Polos de Multiplicidad 1** Si el polo p_i tiene multiplicidad 1, el coeficiente A_{i1} de la expansión podrá calcularse como:

$$A_{i1} = \{(s-p_i)F(s)\}|_{s=p_i}$$

Ejemplo 2.6

$$F(s) = \frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)} = \frac{A_{11}}{s+2} + \frac{A_{21}}{s+4}$$

$$A_{11} = \left\{(s+2)\frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)}\right\}\Bigg|_{s=-2} = \left\{\frac{-3s+1}{(s+4)}\right\}\Bigg|_{s=-2} = \frac{-3(-2)+1}{(-2)+4} = \frac{7}{2}$$

$$A_{21} = \left\{(s+4)\frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)}\right\}\Bigg|_{s=-4} = \left\{\frac{-3s+1}{(s+2)}\right\}\Bigg|_{s=-4} = \frac{-3(-4)+1}{(-4)+2} = -\frac{13}{2}$$

$$F(s) = \frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)} = \frac{7/2}{s+2} + \frac{-13/2}{s+4}$$

2. **Polos de Multiplicidad mayor que 1**

Si el polo p_i tiene multiplicidad r_i, el coeficiente A_{ij} de la expansión podrá calcularse como:

$$A_{ij} = \frac{1}{(r_i - j)!} \frac{d^{r_i - j}}{ds^{r_i - j}} \left\{ (s-p_i)^{r_i} F(s) \right\} \Big|_{s=p_i}$$

Esta expresión también es válida para $r_i = 1$, si se considera que $0! = 1$, y que la derivada de orden cero es la misma función.

Ejemplo 2.7

$$F(s) = \frac{4s^2-1}{(s+2)^3} = \frac{A_{11}}{(s+2)} + \frac{A_{12}}{(s+2)^2} + \frac{A_{13}}{(s+2)^3}$$

$$A_{13} = \frac{1}{(0)!} \frac{d^0}{ds^0} \left\{ (s+2)^3 \frac{4s^2-1}{(s+2)^3} \right\} \Big|_{s=-2} = 4s^2 - 1\big|_{s=-2} = 4(-2)^2 - 1 = 15$$

$$A_{12} = \frac{1}{(1)!} \frac{d^1}{ds^1} \left\{ (s+2)^3 \frac{4s^2-1}{(s+2)^3} \right\} \Big|_{s=-2} = 8s\big|_{s=-2} = 8(-2) = -16$$

$$A_{11} = \frac{1}{(2)!} \frac{d^2}{ds^2} \left\{ (s+2)^3 \frac{4s^2-1}{(s+2)^3} \right\} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2} 8\big|_{s=-2} = 4$$

$$F(s) = \frac{4s^2-1}{(s+2)^3} = \frac{4}{(s+2)} + \frac{-16}{(s+2)^2} + \frac{16}{(s+2)^3}$$

El procedimiento anterior también es válido cuando las raices del denominador son complejas:

Ejemplo 2.8

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+13)} = \frac{A_{11}}{s-0} + \frac{A_{21}}{s-(-2+j3)} + \frac{A_{31}}{s-(-2-j3)}$$

$$A_{11} = \left\{ (s) \frac{10}{s(s^2+4s+13)} \right\} \Big|_{s=0} = \left\{ \frac{10}{(s^2+4s+13)} \right\} \Big|_{s=0} = \frac{10}{(0)^2+4(0)+13} = \frac{10}{13}$$

$$A_{21} = \left\{ (s-(-2+j3)) \frac{10}{s(s^2+14s+13)} \right\} \Big|_{s=-2+j3} = \left\{ \frac{10}{s(s-(-2-j3))} \right\} \Big|_{s=-2+j3}$$

$$A_{21} == \frac{10}{(-2+j3)(-2+j3-(-2-j3))} = \frac{10}{(-2+j3)(j6)} = \frac{10}{-18-j12} = -0{,}38 + j0{,}26$$

$$A_{31} = \left\{ (s-(-2-j3)) \frac{10}{s(s^2+14s+13)} \right\} \Big|_{s=-2-j3} = \left\{ \frac{10}{s(s-(-2+j3))} \right\} \Big|_{s=-2-j3}$$

$$A_{31} == \frac{10}{(-2-j3)(-2-j3-(-2-j3))} = \frac{10}{(-2-j3)(-j6)} = \frac{10}{-18+j12} = -0{,}38 - j0{,}26$$

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+13)} = \frac{10/13}{s} + \frac{-0{,}38+j0{,}26}{s-(-2+j3)} + \frac{-0{,}38-j0{,}26}{s-(-2-j3)}$$

Las fracciones complejas pueden sumarse (nótese que los numeradores y denominadores de una fracción son los conjugados de la otra):

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+13)} = \frac{10/13}{s} + \frac{0{,}77s+3{,}08}{s^2+4s+13}$$

2.2.5.1 Otra estrategia

Existe otra posibilidad para obtener los coeficientes A_{ij}. Consiste en efectuar la suma de las fracciones parciales e igualar coeficientes.

También pueden combinarse las dos estrategias. Además, puede emplearse el hecho según el cual la suma de las fracciones debidas a polos complejos conjugados serán de la forma

$$\frac{As+B}{s^2+Cs+D}$$

Ejemplo 2.9

$$F(s) = \frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)} = \frac{A_{11}}{s+2} + \frac{A_{21}}{s+4}$$

Al sumar las fracciones parciales se tiene:

$$F(s) = \frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)} = \frac{A_{11}s+4A_{11}+A_{21}s+2A_{21}}{(s+2)(s+4)} = \frac{(A_{11}+A_{21})s+(4A_{11}+2A_{21})}{(s+2)(s+4)}$$

Al igualar coeficientes se genera un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} A_{11} + A_{21} = & -3 \\ 4A_{11} + 2A_{21} = & 1 \end{cases} \quad A_{11} = 7/2 \quad A_{21} = -13/2$$

$$F(s) = \frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)} = \frac{7/2}{s+2} + \frac{-13/2}{s+4}$$

Ejemplo 2.10

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+13)} = \frac{A_{11}}{s} + \frac{As+B}{s^2+4s+13}$$

$$A_{11} = \left\{ (s)\frac{10}{s(s^2+4s+13)} \right\}\bigg|_{s=0} = \left\{ \frac{10}{(s^2+4s+13)} \right\}\bigg|_{s=0} = \frac{10}{(0)^2+4(0)+13} = \frac{10}{13}$$

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+13)} = \frac{\frac{10}{13}s^2 + 4\frac{10}{13}s + 3\frac{10}{13} + As^2 + Bs}{s(s^2+4s+13)}$$

$$\begin{cases} \frac{10}{13} + A = & 0 \\ 4\frac{10}{13} + B = & 0 \end{cases} \quad A = -10/13 \quad A = -40/13$$

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+13)} = \frac{10/13}{s} + \frac{0{,}77s + 3{,}08}{s^2+4s+13}$$